Editora Bernoulli

MATEMÁTICA

Volume 02

Sumário - Matemática

MATEMÁTICA

Sistemas métricos e base decimal

MÓDULO 03 FRENTE A

BASE DECIMAL DE NUMERAÇÃO

Base numérica é o conjunto de símbolos (ou algarismos) utilizados para representar uma quantidade.

Diariamente, utilizamos o sistema de numeração decimal formado pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Os demais números são formados agrupando-se dois ou mais algarismos e considerando as posições relativas deles.

O número 23, por exemplo, corresponde a 20 + 3, ou seja, 2 grupos de dez unidades e mais 3 unidades. Já o número 154 pode ser decomposto na forma 100 + 50 + 4, ou seja, 1 grupo de cem unidades, 5 grupos de dez unidades e mais 4 unidades. Assim:

$23 = 2.10 + 3$

ou

Dezena	Unidade
2	3

$154 = 1.10^2 + 5.10 + 4$

ou

Centena	Dezena	Unidade
1	5	4

$abcd = a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$

ou

Milhar	Centena	Dezena	Unidade
a	b	c	d

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Justapondo-se 82 à esquerda de um número **x**, obtém-se o número **z**. Justapondo-se 36 à direita do mesmo número **x**, obtém-se o número **y**. Se y + z = 1 563, determinar a soma dos algarismos de **x**.

Resolução:

1ª maneira:

$82x = z \Rightarrow 8.10^2 + 2.10 + x = z$

$x36 = y \Rightarrow x.10^2 + 3.10 + 6 = y$

Por hipótese: $y + z = 1\,563$

Então: $100x + 36 + 820 + x = 1\,563 \Rightarrow x = 7$

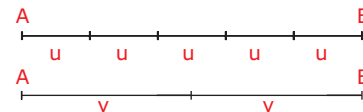
2ª maneira:

$$\begin{array}{rl} 82x & \rightarrow z \\ +\quad x36 & \rightarrow y \\ \hline 1\,563 & \end{array}$$

O único algarismo que satisfaz a operação anterior é x = 7.

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Ao medir um segmento de reta $\overline{AB}$, devemos adotar uma unidade de medida e, em seguida, verificar quantas vezes essa unidade cabe em $\overline{AB}$.

Por exemplo, o comprimento de $\overline{AB}$ na unidade u é 5u, enquanto na unidade v é 2v.

A unidade de medida adotada como padrão no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro. No quadro a seguir, apresentamos os múltiplos e os submúltiplos do metro.

Múltiplos			Submúltiplos		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

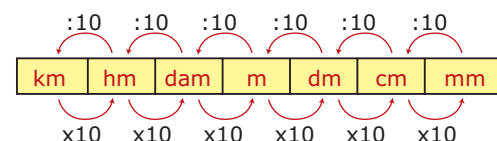
Pelo quadro anterior, percebemos que:

1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m

1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm

Concluímos que, para mudarmos de uma unidade para outra, procedemos da seguinte maneira:

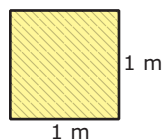
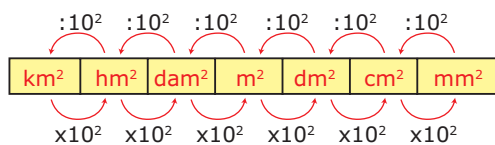
Multiplicamos por 10 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10 a cada casa deslocada para a esquerda.

Exemplos

1º) 12,73 km = 127,3 hm

2º) 743 dm = 74,3 m = 7,43 dam

UNIDADES DE ÁREA

Se a unidade de comprimento padrão é o metro, a unidade padrão de área é o m^2, que corresponde à área de um quadrado de lado 1 m.

Múltiplos e submúltiplos

Para mudarmos de uma unidade de área para outra, procedemos da seguinte forma:

Multiplicamos por 10^2 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10^2 a cada casa deslocada para a esquerda.

Exemplos

1º) $0{,}003\ km^2 = 0{,}3\ hm^2 = 30\ dam^2 = 3\ 000\ m^2$

2º)

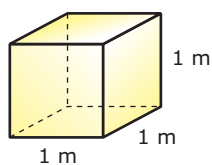
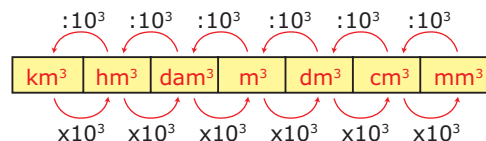
Área = $1\ m^2 = 100\ dm^2$

OBSERVAÇÃO

1 a (are) = $100\ m^2$

1 ha (hectare) = 100 a = $10\ 000\ m^2$

UNIDADES DE VOLUME

A unidade padrão de volume é o m^3, que corresponde ao volume de um cubo de aresta 1 m.

Múltiplos e submúltiplos

Para mudarmos de uma unidade de volume para outra, procedemos do seguinte modo:

Multiplicamos por 10^3 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10^3 a cada casa deslocada para a esquerda.

Exemplos

1º) $1\ hm^3 = 10^3\ dam^3 = 10^6\ m^3$

2º) $2\ 520\ mm^3 = 2{,}52\ cm^3$

Comumente, utilizamos a unidade litro e seus múltiplos e submúltiplos. Veja algumas relações:

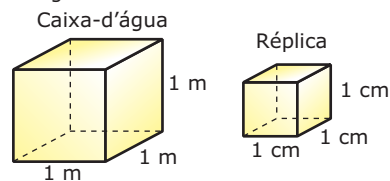
1 L = 1 dm^3
1 000 L = 1 m^3
1 mL = 1 cm^3

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFOP-MG–2009) Na maquete de uma casa, a réplica de uma caixa-d'água de 1 000 litros tem 1 mililitro de capacidade. Se a garagem da maquete tem 3 centímetros de largura por 7 centímetros de comprimento, então a área real da garagem da casa é de

A) 21 cm^2. B) 21 m^2. C) 210 m^2. D) 10 m^2.

Resolução:

A caixa-d'água tem capacidade de 1 000 L ou 1 m^3, enquanto sua réplica tem capacidade de 1 mL ou 1 cm^3. Considerando a caixa-d'água com formato cúbico, temos a situação seguinte:

Portanto, as dimensões da caixa-d'água foram reduzidas em 100 vezes (mesmo que a caixa não seja cúbica). A garagem da maquete tem 3 cm de largura por 7 cm de comprimento. Como essas medidas estão reduzidas em 100 vezes, a área real da garagem da casa será dada por:

A = (300 cm).(700 cm) = (3 m).(7 m) = 21 m^2

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UERJ) João mediu o comprimento do seu sofá com o auxílio de uma régua.

Colocando 12 vezes a régua na direção do comprimento, sobraram 15 cm da régua; por outro lado, estendendo 11 vezes, faltaram 5 cm para atingir o comprimento total. O comprimento do sofá, em centímetros, equivale a

A) 240 B) 235 C) 225 D) 220

02. (UFJF-MG) A densidade demográfica de uma certa cidade é de 0,002 habitantes por metro quadrado. Se essa cidade ocupa uma área de 180 km^2, o número de seus habitantes é

A) 36 milhões.
B) 9 milhões.
C) 360 mil.
D) 3,6 milhões.
E) 60 mil.

03. (UFMG–2006) Sejam **N** um número natural de dois algarismos não nulos e **M** o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de **N**. Sabe-se que N – M = 45. Então, quantos são os **POSSÍVEIS** valores de **N**?

A) 7 B) 4 C) 5 D) 6

04. (UNESP–2009) Seja **n** um número natural de 3 algarismos. Se ao multiplicar-se **n** por 7 obtém-se um número terminado em 373, é **CORRETO** afirmar que

A) **n** é par.
B) o produto dos algarismos de **n** é par.
C) a soma dos algarismos de **n** é divisível por 2.
D) **n** é divisível por 3.
E) o produto dos algarismos de **n** é primo.

05. (PUC Minas) Na maquete de uma casa, feita na escala 1:500, uma sala tem 8 mm de largura, 10 mm de comprimento e 8 mm de altura. A capacidade, em litros, dessa sala é

A) 640
B) 6 400
C) 800
D) 8 000
E) 80 000

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) De um tecido de 1,2 m de largura, Maria cortou 780 quadrados de 24 cm de lado. O comprimento do tecido gasto, em metros, é

A) 3,774
B) 15,6
C) 22,46
D) 37,44
E) 156

02. (UFMG) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões 90 cm, 2 m e 7,5 dm é

A) $1,35 \times 10^{-2}$ m^3.
B) $1,35 \times 10^{-1}$ m^3.
C) 1,35 m^3.
D) $1,35 \times 10^{2}$ m^3.
E) $1,35 \times 10^{3}$ m^3.

03. (UFOP-MG–2008) Uma certa região foi mapeada de tal maneira que 10 km correspondem, na escala do mapa, a 4 cm. Um quadrado de área 1,6 km^2 corresponde, no mapa, a um quadrado de lado, em cm, igual a

A) $0,16\sqrt{10}$
B) 0,16
C) $0,4\sqrt{10}$
D) 0,4

04. (UERJ) Ao analisar as notas fiscais de uma firma, o auditor deparou-se com a seguinte situação.

Quantidade	Mercadorias	Preço unitário	Total
*Metros	Cetim	21,00	*56,00

Não era possível ver o número de metros vendidos, mas sabia-se que era um número inteiro. No valor total, só apareciam os dois últimos dos três algarismos da parte inteira. Com as informações anteriores, o auditor concluiu que a quantidade de cetim, em metros, declarada nessa nota foi

A) 16 B) 26 C) 36 D) 46

05. Considere um inteiro **x** e um inteiro **y**, este com dois algarismos. Justapondo-se o número **y** à direita do número **x**, encontramos um valor que excede **x** em 248 unidades. Determine a soma x + y.

A) 52 B) 64 C) 128 D) 58 E) 68

06. (Cesgranrio) Considere os números inteiros abc e bac, em que **a**, **b** e **c** são algarismos distintos e diferentes de zero, e a > b. A diferença abc – bac será sempre um múltiplo de

A) 4

B) 8

C) 9

D) 12

E) 20

07. (Fatec-SP) Um número natural **A**, de dois algarismos, é tal que, se invertermos a ordem desses algarismos, obteremos um número 18 unidades maior. Se a soma dos algarismos de **A** é 10, então o algarismo das dezenas de **A** é

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

08. (FUVEST-SP–2006) Um número natural **N** tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396, resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de **N**. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de **N** é igual a 8, então o algarismo das centenas de **N** é

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

09. (CEFET-MG–2009) O número ab2, em que **a** é o algarismo das centenas e **b**, o das dezenas, ao ser multiplicado por 8, obtém-se o número 53ba, em que **b** é o algarismo das dezenas e **a** é o das unidades. Assim, a diferença (a – b) vale

A) –2

B) –1

C) 1

D) 2

E) 3

10. (FGV-SP–2010) Sejam **x** e **y** a soma e o produto, respectivamente, dos dígitos de um número natural. Por exemplo, se o número é 142, então x = 7 e y = 8. Sabendo-se que **N** é um número natural de dois dígitos tal que N = x + y, o dígito da unidade de **N** é

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

11. (UEL-PR) Seja o número XYZ, no qual **X** é o algarismo das centenas, **Y**, o das dezenas e **Z**, o das unidades. Invertendo-se a ordem dos algarismos, obtém-se o número ZYX, que excede XYZ em 198 unidades. Se a soma dos três algarismos é 15 e o produto dos algarismos extremos é 8, então o número XYZ está compreendido entre

A) 250 e 300

B) 300 e 350

C) 400 e 450

D) 500 e 550

E) 550 e 600

12. (FUVEST-SP) Um número inteiro positivo **n** de 4 algarismos decimais satisfaz às seguintes condições.

I. A soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58.

II. A soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52.

III. Se desse número **n** subtrairmos o número 3 816, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos do número **n**, mas na ordem contrária.

Qual é esse número?

13. (UEG-GO–2007) Paulo disse a Maria que iria descobrir o seu número de telefone. Pediu-lhe que, em segredo, multiplicasse o número constituído pelos quatro primeiros algarismos de seu telefone por 40 e a esse produto adicionasse 1. Pediu-lhe, então, que multiplicasse o número obtido por 250 e, em seguida, somasse o resultado disso ao número formado pelos quatro últimos algarismos de seu telefone. Paulo afirmou que o número do telefone seria este resultado. Infelizmente, o número estava errado, pois para obter o número correto deveria subtrair certa quantidade deste resultado. Esta quantidade é

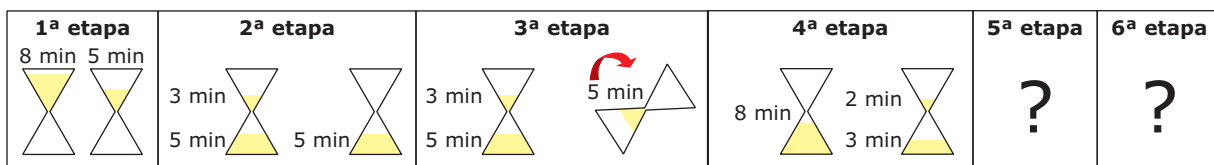
A) 350

B) 250

C) 150

D) 100

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Um dos diversos instrumentos que o homem concebeu para medir o tempo foi a ampulheta, também conhecida como relógio de areia. Suponha que uma cozinheira tenha de marcar 11 minutos, que é o tempo exato para assar os biscoitos que ela colocou no forno. Dispondo de duas ampulhetas, uma de 8 minutos e outra de 5, ela elaborou 6 etapas, mas fez o esquema, representado a seguir, somente até a 4ª etapa, pois é só depois dessa etapa que ela começa a contar os 11 minutos.

A opção que completa o esquema é

A)

B)

C)

D)

E)

02. (Enem–2009)

Técnicos concluem mapeamento do Aquífero Guarani

O Aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O Aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo. Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http:/noticias.terra.com.br>.
Acesso em: 10 jul. 2009 (Adaptação).

Comparando as capacidades do Aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do Aquífero Guarani é

A) $1,5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.

B) $1,5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.

C) $1,5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.

D) $1,5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.

E) $1,5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

03. (Enem–2009) Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da Lua. O calendário maia segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra.

MATSUURA, Oscar. Calendários e o fluxo do tempo. *Scientific American Brasil*. Disponível em: <http://www.uol.com.br>. Acesso em: 14 out. 2008 (Adaptação).

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

A) 30 ciclos

B) 40 ciclos

C) 73 ciclos

D) 240 ciclos

E) 384 ciclos

04. (Enem–2008)

A contagem de bois

Em cada parada ou pouso, para jantar ou dormir, os bois são contados, tanto na chegada quanto na saída. Nesses lugares, há sempre um potreiro, ou seja, determinada área de pasto cercada de arame, ou mangueira, quando a cerca é de madeira. Na porteira de entrada do potreiro, rente à cerca, os peões formam a seringa ou funil, para afinar a fila, e então os bois vão entrando aos poucos na área cercada. Do lado interno, o condutor vai contando; em frente a ele, está o marcador, peão que marca as reses. O condutor conta 50 cabeças e grita: — Talha! O marcador, com o auxílio dos dedos das mãos, vai marcando as talhas. Cada dedo da mão direita corresponde a 1 talha, e da mão esquerda, a 5 talhas. Quando entra o último boi, o marcador diz: — Vinte e cinco talhas! E o condutor completa: — E dezoito cabeças. Isso significa 1 268 bois.

O ESTADO DE S. PAULO. Boiada, comitivas e seus peões, ano VI, ed. 63, 21 dez. 1952 (Adaptação).

Para contar os 1 268 bois de acordo com o processo descrito anteriormente, o marcador utilizou

A) 20 vezes todos os dedos da mão esquerda.

B) 20 vezes todos os dedos da mão direita.

C) todos os dedos da mão direita apenas uma vez.

D) todos os dedos da mão esquerda apenas uma vez.

E) 5 vezes todos os dedos da mão esquerda e 5 vezes todos os dedos da mão direita.

05. (Enem–2010) A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

VEJA. Ano 41, nº. 26, 25 jun. 2008 (Adaptação).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

A) 406 C) 4 002 E) 28 014

B) 1 334 D) 9 338

06. (Enem–2010) No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (Adaptação).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

A) 1:20 C) 1:200 E) 1:2 000

B) 1:100 D) 1:1 000

GABARITO

Fixação

01. C 02. C 03. B 04. D 05. E

Propostos

01. D	05. A	09. B	13. B
02. C	06. C	10. E	
03. A	07. B	11. A	
04. C	08. C	12. 7 463	

Seção Enem

01. C	03. A	05. B
02. E	04. D	06. E

MATEMÁTICA

Médias

MÓDULO 04 FRENTE A

MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética dos números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplos

1º) Calcular a média aritmética dos números $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{63}$.

$$A = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{9} + \frac{4}{63}}{3} = \frac{9.5 + 7.2 + 4}{3.7.9} = \frac{63}{189} = \frac{1}{3}$$

2º) (FUVEST-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

A média aritmética da primeira rodada foi de $\frac{5+3+1+4+0+2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ gols por jogo. A média da rodada seguinte é 20% superior, ou seja, é de $\frac{5}{2}.1,2 = \frac{5}{2}.\frac{6}{5} = 3$ gols por jogo. Como serão realizadas 11 partidas, teremos um total de 33 gols. Porém, na primeira rodada, já foram feitos 15 gols. Portanto, na segunda rodada, o número de gols marcados é 18.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica dos números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3. \ ... \ .x_n}$$

Exemplos

1º) Calcular a média geométrica dos números 90, 75 e 4.

$G = \sqrt[3]{90.75.4} = \sqrt[3]{27\,000} = 30$

2º) José investiu um capital **C** na bolsa há 3 anos. No primeiro ano, ele obteve um rendimento de 27%, no segundo ano, o rendimento caiu para 12% e, no terceiro ano, ocorreu um prejuízo de 8%. Qual foi o rendimento médio anual?

O montante obtido por José ao final dos três anos é dado por M = 1,27.1,12.0,92.C. Desejamos encontrar uma taxa média **i** tal que $M = (1 + i)^3C$. Logo, temos:

$(1 + i)^3C = 1,27.1,12.0,92.C \Rightarrow$

$(1 + i)^3 = 1,27.1,12.0,92 \Rightarrow$

$(1 + i) = \sqrt[3]{1,27.1,12.0,92}$

Observe que (1 + i) é a média geométrica dos números 1,27, 1,12 e 0,92. Essa média é dada por $\sqrt[3]{1,308608}$, que é, aproximadamente, 1,0938. Logo, o rendimento médio anual é, aproximadamente, 9,38%.

MÉDIA HARMÔNICA

Dados os números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média harmônica desses números é definida por:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplos

1º) Calcular a média harmônica dos números 15 e 5.

$$H = \frac{2}{\frac{1}{15} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{15}} = 2.\frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

2º) João está fazendo uma viagem. Na primeira metade da viagem, sua velocidade média é 80 km/h. Na segunda metade da viagem, sua velocidade média aumentou para 120 km/h. Qual a velocidade média no total do percurso?

A velocidade média **v** é dada pela média harmônica das velocidades nas duas metades da viagem. Assim:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{5}{240}} = 2.\frac{240}{5} = 96$$

Portanto, a velocidade média ao longo de toda a viagem foi de 96 km/h.

PROPRIEDADE

Dados a, b $\in \mathbb{R}^*_+$, com a $\geq$ b, valem as seguintes desigualdades:

$$b \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq a$$

Essa propriedade também é verificada para três ou mais números reais positivos. As médias estão no intervalo que vai do menor até o maior número tomado. Quando elas são diferentes, a maior entre elas é a aritmética, e a menor, a harmônica.

MÉDIA PONDERADA

A média ponderada dos números reais positivos x_1, x_2, x_3, ..., x_n com pesos m_1, m_2, m_3, ..., m_n (também números reais positivos), respectivamente, é definida por:

$$P = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Exemplos

1º) Calcular a média ponderada dos números 15, 20 e 40 com pesos 6, 3 e 1, respectivamente.

$$M = \frac{15.6 + 20.3 + 40}{6 + 3 + 1} = \frac{90 + 60 + 40}{10} = \frac{190}{10} = 19$$

2º) No processo seletivo de uma empresa, os candidatos são submetidos a testes de Português e Matemática, além de uma entrevista. A cada um desses é atribuída uma nota que varia de zero a dez. Porém, a entrevista tem peso três vezes maior que os testes de Matemática e Português. A nota final do candidato é a média das notas de cada etapa, considerando-se o peso de cada uma delas. Essa empresa só seleciona candidatos que obtiverem uma nota final igual ou superior a oito. Maria obteve nota 6 no teste de Português e 7 em Matemática. Qual é a nota mínima que ela deve obter na entrevista para ser selecionada?

Considere que as notas no teste de Português, no de Matemática e na entrevista sejam, respectivamente, n_p, n_m e n_e. Dessa forma, a nota final **N** de um candidato é dada por:

$$N = \frac{n_p + n_m + 3n_e}{1 + 1 + 3}$$

Assim, para Maria obter nota 8, devemos ter:

$$\frac{6 + 7 + 3n_e}{5} = 8 \Rightarrow 13 + 3n_e = 40 \Rightarrow 3n_e = 27 \Rightarrow n_e = 9$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG–2008) Uma empresa com 20 funcionários torna públicos os salários de seus funcionários, ocultando o salário de seu diretor, conforme a tabela a seguir:

Função	Salário	Nº de funcionários
Auxiliar	R$ 1 000,00	10
Secretária	R$ 1 500,00	5
Consultor	R$ 2 000,00	4
Diretor	*	1

A empresa promoveu um aumento salarial de 10% sobre os valores da tabela para todas as funções. Foi divulgado que a nova média salarial da empresa passou a ser de R$ 1 952,50. Qual é o novo salário de diretor?

A) R$ 2 500,00
B) R$ 4 500,00
C) R$ 10 000,00
D) R$ 11 000,00
E) R$ 25 500,00

02. (UFMG) Um carro, que pode utilizar como combustível álcool e gasolina misturados em qualquer proporção, é abastecido com 20 litros de gasolina e 10 litros de álcool. Sabe-se que o preço do litro de gasolina e o do litro de álcool são, respectivamente, R$ 1,80 e R$ 1,20. Nessa situação, o preço médio do litro do combustível que foi utilizado é de

A) R$ 1,50.
B) R$ 1,55.
C) R$ 1,60.
D) R$ 1,40.

03. (PUC-Campinas-SP) A análise do biotipo de cada um dos atletas que integraram a delegação brasileira na última Olimpíada permitiu que se calculasse, certo dia, a média de pesos das 122 mulheres participantes: 62 kg. Supondo-se que uma dessas atletas fosse excluída do grupo, a média de pesos das 121 restantes passaria a ser 61,9 kg. Nessas condições, o peso, em quilogramas, da atleta excluída seria

A) 75,5
B) 75,2
C) 74,6
D) 74,1
E) 73,8

04. (UEL-PR) Um automóvel subiu uma ladeira a uma velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h. A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de

A) 72 km/h.
B) 75 km/h.
C) 78 km/h.
D) 80 km/h.
E) 84 km/h.

05. (UFG–2007) A média das notas dos alunos de um professor é igual a 5,5. Ele observou que 60% dos alunos obtiveram nota de 5,5 a 10 e que a média das notas desse grupo de alunos foi 6,5. Nesse caso, considerando o grupo de alunos que tiveram notas inferiores a 5,5, a média de suas notas foi de

A) 2,5
B) 3,0
C) 3,5
D) 4,0
E) 4,5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Minas–2007) De acordo com os dados de uma pesquisa, os brasileiros de 12 a 17 anos navegam em média 42 minutos em cada acesso à Internet, ao passo que, na França, o tempo médio de navegação dos jovens é 25% a menos que no Brasil e, nos Estados Unidos, é 20% a menos que na França. Com base nesses dados, pode-se estimar que a média aritmética dos tempos de navegação, por acesso, nesses três países, em minutos, é igual a

A) 30,6
B) 32,9
C) 34,3
D) 36,4

02. (FUVEST-SP) Numa classe de um colégio, existem estudantes de ambos os sexos. Numa prova, as médias aritméticas das notas dos meninos e das meninas foram, respectivamente, iguais a 6,2 e 7,0. A média aritmética das notas de toda a classe foi igual a 6,5.

A) A maior parte dos estudantes dessa classe é composta de meninos ou meninas? **JUSTIFIQUE** sua resposta.

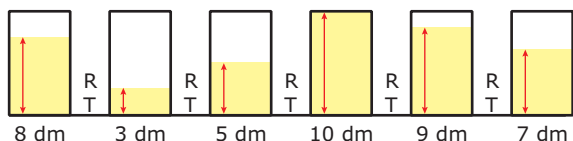
B) Que porcentagem do total de alunos da classe é do sexo masculino?

03. (FUVEST-SP) Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O **MAIOR** valor que um desses inteiros pode assumir é

A) 16
B) 20
C) 50
D) 70
E) 100

04. (PUC-Campinas-SP) Sabe-se que os números **x** e **y** fazem parte de um conjunto de 100 números cuja média aritmética é 9,83. Retirando-se **x** e **y** desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será 8,5. Se $3x - 2y = 125$, então

A) $x = 75$
B) $y = 55$
C) $x = 80$
D) $y = 65$
E) $x = 95$

05. (UERJ) Seis caixas-d'água cilíndricas iguais estão assentadas no mesmo piso plano e ligadas por registros **R** situados nas suas bases, como sugere a figura a seguir:

Após a abertura de todos os registros, as caixas ficaram com os níveis de água no mesmo plano. A altura desses níveis, em dm, equivale a

A) 6,0
B) 6,5
C) 7,0
D) 7,5

06. (UFMG) No início de uma partida de futebol, a altura média dos 11 jogadores de um dos times era 1,72 m. Ainda no primeiro tempo, um desses jogadores, com 1,77 m de altura, foi substituído. Em seu lugar, entrou um outro que media 1,68 m de altura. No segundo tempo, outro jogador do mesmo time, com 1,73 m de altura, foi expulso. Ao terminar a partida, a altura média dos 10 jogadores desse time era

A) 1,69 m.
B) 1,70 m.
C) 1,71 m.
D) 1,72 m.

07. (UFMG–2006) Os 40 alunos de uma turma fizeram uma prova de Matemática valendo 100 pontos. A nota média da turma foi de 70 pontos e apenas 15 dos alunos conseguiram a nota máxima. Seja **M** a nota média dos alunos que não obtiveram a nota máxima. Então, é **CORRETO** afirmar que o valor de **M** é

A) 53 B) 50 C) 51 D) 52

08. (FUVEST-SP) Uma prova continha cinco questões, cada uma valendo 2 pontos. Em sua correção, foram atribuídas a cada questão apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse, respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada aluno. Ao final da correção, produziu-se a seguinte tabela, contendo a porcentagem de acertos em cada questão.

Questão	1	2	3	4	5
% de acerto	30%	10%	60%	80%	40%

Logo, a média das notas da prova foi

A) 3,8 B) 4,0 C) 4,2 D) 4,4 E) 4,6

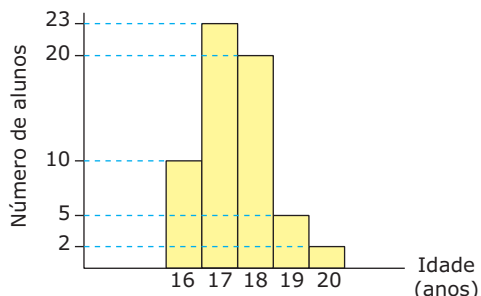
09. (UNIFESP) Para ser aprovado num curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais durante o período letivo e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média no mínimo igual a 7. Se um estudante obteve nas provas parciais as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota **MÍNIMA** que necessita obter na prova final para ser aprovado é

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

10. (UFPE) Uma pesquisa sobre o consumo de bebida alcoólica de um grupo de 20 estudantes, em um período de 30 dias, produziu o seguinte resultado.

Número de unidades de bebida alcoólica	Número de estudantes que consumiram
0 a 10	12
De 11 a 20	8
Acima de 20	0

Qual o valor máximo que a média do número de unidades alcoólicas consumidas pelos estudantes no período pode atingir?

11. (FUVEST-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo gráfico adiante. Qual das alternativas representa **MELHOR** a média de idades dos alunos?

A) 16 anos e 10 meses

B) 17 anos e 1 mês

C) 17 anos e 5 meses

D) 18 anos e 6 meses

E) 19 anos e 2 meses

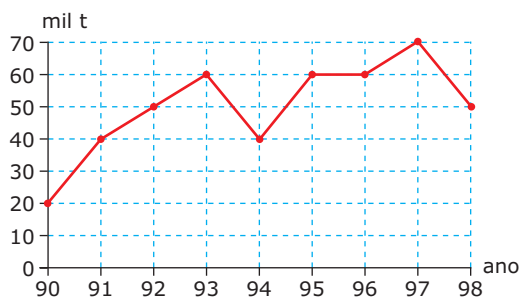
12. (UFMG) Define-se a média aritmética de **n** números dados como o resultado da divisão por **n** da soma dos **n** números dados. Sabe-se que 3,6 é a média aritmética de 2,7; 1,4; 5,2 e **x**. O número **x** é igual a

A) 2,325

B) 3,1

C) 3,6

D) 5,1

13. (VUNESP) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção no estado de São Paulo de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 e 1998.

Analisando o gráfico, observa-se que a produção

A) foi crescente entre 1992 e 1995.

B) teve média de 40 mil toneladas ao ano.

C) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.

D) a partir de 1995 foi decrescente.

E) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

14. (FUVEST-SP) Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela.

Número de infrações	Número de motoristas
De 1 a 3	7
De 4 a 6	10
De 7 a 9	15
De 10 a 12	13
De 13 a 15	5
Maior ou igual a 16	0

Pode-se, então, afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para esse grupo, está entre

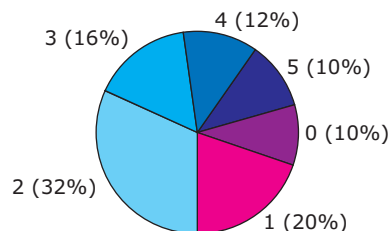
A) 6,9 e 9,0

B) 7,2 e 9,3

C) 7,5 e 9,6

D) 7,8 e 9,9

E) 8,1 e 10,2

15. (Unicamp-SP) O gráfico a seguir, em forma de *pizza*, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32 000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.

Pergunta-se:

A) Quantos candidatos tiveram nota 3?

B) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi < 2? **JUSTIFIQUE** sua resposta.

16. (FCC-SP) A média aritmética de 11 números é 45. Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será

A) 48,7

B) 48

C) 47,5

D) 42

E) 41,5

17. (PUC-SP) A média aritmética de 100 números é igual a 40,19. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos 99 números restantes passará a ser 40,5. O número retirado equivale a

A) 9,5%.

B) 75%.

C) 95%.

D) 765%.

E) 950%.

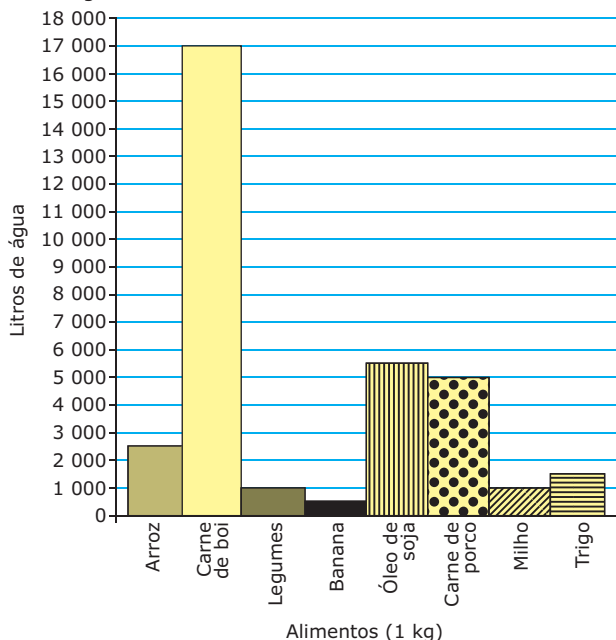
18. (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo no grupo?

19. (FUVEST-SP) Numa classe com vinte alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto que a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados, 68,8.

A) **CALCULE** a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras.

B) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação?

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade de litros de água necessária para a produção de 1 kg de alguns alimentos.

Com base no gráfico, para a produção de 100 kg de milho, 100 kg de trigo, 100 kg de arroz, 100 kg de carne de porco e 600 kg de carne de boi, a quantidade média necessária de água, por quilograma de alimento produzido, é aproximadamente igual a

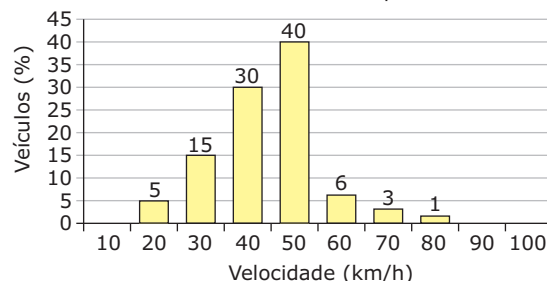
A) 415 litros por quilograma.

B) 11 200 litros por quilograma.

C) 27 000 litros por quilograma.

D) 2 240 000 litros por quilograma.

E) 2 700 000 litros por quilograma.

02. (Enem–1999) Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.

A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de

A) 35 km/h.

B) 44 km/h.

C) 55 km/h.

D) 76 km/h.

E) 85 km/h.

03. (Enem–2009) A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – p.p.m.)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II. Matemática TP3.
Disponível em: <www.gov.br>. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em p.p.m.) e a produção (em toneladas) é

A) inferior a 0,18.

B) superior a 0,18 e inferior a 0,50.

C) superior a 0,50 e inferior a 1,50.

D) superior a 1,50 e inferior a 2,80.

E) superior a 2,80.

04. (Enem–2009) Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	**Brasil na França**	**França no Brasil**
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1 458
2006	539	744
2007	280	1 214

Disponível em: <www.cartacapital.com.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor

A) inferior a 300 milhões de dólares.

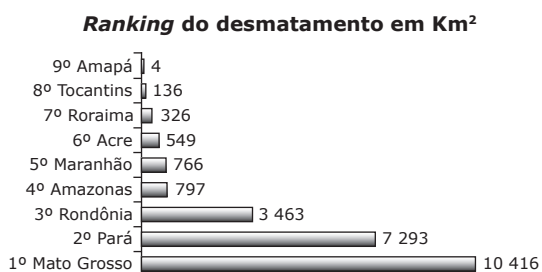
B) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.

C) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.

D) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.

E) superior a 600 milhões de dólares.

05. (Enem–2010) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.

***Ranking* do desmatamento em Km²**

Disponível em: www.folhaonline.com.br. Acesso em: 30 abr. 2010 (Adaptação).

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

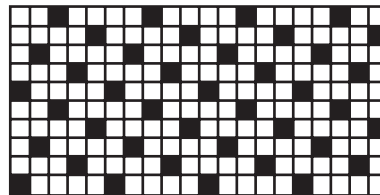
A) 100 km² e 900 km².

B) 1 000 km² e 2 700 km².

C) 2 800 km² e 3 200 km².

D) 3 300 km² e 4 000 km².

E) 4 100 km² e 5 800 km².

06. (Enem–2005) Um pátio de grandes dimensões será revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado a seguir, que será repetido em toda a extensão do pátio.

As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de

A) R$ 8,20.

B) R$ 8,40.

C) R$ 8,60.

D) R$ 8,80.

E) R$ 9,00.

GABARITO

Fixação

01. D 02. C 03. D 04. B 05. D

Propostos

01. B

02. A) O número de meninos é maior do que o número de meninas, já que a média da turma se encontra mais próxima da média masculina.
    B) 62,5%

03. D

04. D

05. C

06. C

07. D

08. D

09. A

10. 14

11. C

12. D

13. E

14. A

15. A) 5 120 candidatos
    B) Não. A nota média é igual a 2,30.

16. A

17. E

18. 80 mulheres e 40 homens

19. A) 72,2
    B) 3

Seção Enem

01. B 03. D 05. C

02. B 04. D 06. B

MATEMÁTICA

Equações e problemas

MÓDULO 03 | FRENTE B

INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste módulo, alguns métodos de resolução de equações e de sistemas de equações. Resolver uma equação significa determinar suas raízes, ou seja, os valores que tornam a sentença verdadeira. O conjunto formado por todas as raízes da equação é denominado conjunto verdade ou conjunto solução.

Por exemplo, 7 é raiz da equação $2x + 1 = 15$, pois $2.7 + 1 = 15$ é uma sentença verdadeira.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Chamamos de equação do 1º grau a toda sentença da forma $ax + b = 0$, em que **a** e **b** são os coeficientes e $a \neq 0$.

Dessa forma, temos que:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

O conjunto solução é, então, $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

EQUAÇÕES TIPO PRODUTO OU QUOCIENTE NULO

Para resolvermos uma equação do tipo $a.b = 0$, lembremos que, se $a.b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemplo

$$(2x+1).(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ \text{ou} \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$.

Para resolvermos uma equação do tipo $\frac{a}{b} = 0$, lembremos que, para o quociente ser nulo, devemos ter $a = 0$ e $b \neq 0$.

Exemplo

$$\frac{(3x+4).(x-1)}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ x-1=0 \\ \text{e} \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{e} \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Chamamos de equação do 2º grau a toda sentença que pode ser reduzida a $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes e $a \neq 0$.

A resolução desse tipo de equação é dada pela Fórmula de Bhaskara:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Demonstração:

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$

Multiplicando os dois membros desta última igualdade por 4a, tem-se:

$ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando, agora, b^2 aos dois membros da igualdade, obtém-se:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Para $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, tem-se:

$(2ax + b)^2 = \Delta \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Discussão do número de raízes

A quantidade de raízes de uma equação do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante.

Se $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.
Se $\Delta = 0$, a equação admite duas raízes reais e iguais.
Se $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas.

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

1ª) $c = 0$ e $b \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemplo

$$2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

2ª) $b = 0$ e $c \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Portanto, $S = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, se $-\dfrac{c}{a} > 0$.

Se $-\dfrac{c}{a} < 0$, então não existe raiz real, e $S = \varnothing$.

Exemplos

1º) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

2º) $2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$

$x = \sqrt{-4} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

Portanto, $S = \varnothing$.

3ª) $b = 0$ e $c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{0\}$.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a \neq 0$, vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1.x_2$.

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

Portanto, a soma das raízes é dada por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ii) $x_1.x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} . \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} \Rightarrow$

$x_1.x_2 = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Portanto, o produto das raízes é dado por:

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemplo

Vamos determinar **k** a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$ seja igual ao quádruplo da outra. Logo:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$ (I)

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = k + 3,$ (II)

Por hipótese, $x_1 = 4x_2$. (III)

Assim, substituindo (III) em (I):

$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$ e $x_1 = 4$

Daí, de (II), temos:

$4.1 = k + 3 \Rightarrow k = 1$

SISTEMA DE EQUAÇÕES

A solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas, **x** e **y**, é qualquer par ordenado de valores (x, y) que satisfaz a ambas equações.

Observe que o par ordenado (8, 1) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Métodos de resolução de sistemas

Substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e em substituir a expressão encontrada na outra equação.

Exemplo

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

Pelo método da substituição, escolhemos, por exemplo, a equação $x + y = 7$, e vamos isolar a incógnita **x**. Logo:

$x + y = 7 \Leftrightarrow x = 7 - y$

Agora, substituindo **x** por 7 − y na equação x − y = 3, temos:

$x - y = 3 \Leftrightarrow 7 - y - y = 3 \Leftrightarrow -2y = -4 \Leftrightarrow y = 2$

Agora, substituindo **y** por 2 na equação x + y = 7, temos:

$x + y = 7 \Leftrightarrow x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 5$

Portanto, S = {(5, 2)}.

Adição

Para resolver um sistema pelo método da adição, adicionamos membro a membro as equações de modo a anular uma das incógnitas.

Exemplo

Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$.

Pelo método da adição, adicionamos membro a membro as duas equações.

$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases} \downarrow \text{soma}$

$2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$

Substituindo 7 na equação x + y = 8, por exemplo, temos:

$7 + y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

Portanto, S = {(7, 1)}.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Fatec-SP–2007) João tinha **B** balas. Comeu uma e deu metade do que sobrou para Mário. Depois de comer mais uma, deu metade do que sobrou para Felipe e ainda ficou com 7 balas. O número **B** é tal que

A) 10 < B < 20

B) 20 < B < 30

C) 30 < B < 40

D) 40 < B < 50

E) B > 50

02. (FUVEST-SP–2007) A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então, m + n é igual a

A) 9

B) 8

C) 7

D) 6

E) 5

03. (UFG–2007) Uma pequena empresa, especializada em fabricar cintos e bolsas, produz mensalmente 1 200 peças. Em um determinado mês, a produção de bolsas foi três vezes maior que a produção de cintos. Nesse caso, a quantidade de bolsas produzidas nesse mês foi

A) 300

B) 450

C) 600

D) 750

E) 900

04. (PUC Minas–2006) Três atletas, **A**, **B** e **C**, participam de uma prova de revezamento. Depois de percorrer $\frac{2}{7}$ da prova, **A** é substituído por **B**, que percorre mais $\frac{2}{5}$ da prova. Em seguida, **B** dá lugar a **C**, que completa os 660 metros restantes. Com base nesses dados, a distância percorrida por esses três atletas, em quilômetros, é

A) 2,10

B) 2,32

C) 2,40

D) 2,64

05. (UFJF-MG–2009) Uma gaveta contém somente lápis, canetas e borrachas. A quantidade de lápis é o triplo da quantidade de canetas. Se colocarmos mais 12 canetas e retirarmos 2 borrachas, a gaveta passará a conter o mesmo número de lápis, canetas e borrachas. Quantos objetos havia na gaveta inicialmente?

A) 34

B) 44

C) 54

D) 64

E) 74

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP–2007) Os estudantes de uma classe organizaram sua festa de final de ano, devendo cada um contribuir com R$ 135,00 para as despesas. Como 7 alunos deixaram a escola antes da arrecadação e as despesas permaneceram as mesmas, cada um dos estudantes restantes teria de pagar R$ 27,00 a mais. No entanto, o diretor, para ajudar, colaborou com R$ 630,00. Quanto pagou cada aluno participante da festa?

A) R$ 136,00

B) R$ 138,00

C) R$ 140,00

D) R$ 142,00

E) R$ 144,00

02. (UFG–2007) Uma videolocadora classifica seus 1 000 DVDs em lançamentos e catálogo (não lançamentos). Em um final de semana, foram locados 260 DVDs, correspondendo a quatro quintos do total de lançamentos e um quinto do total de catálogo. Portanto, o número de DVDs de catálogo locados foi

A) 80

B) 100

C) 130

D) 160

E) 180

03. (UEG–2006) Maria Helena comprou, no primeiro domingo de junho, cinco quilos de carne e dois pacotes de carvão, pagando R$ 34,60. No domingo seguinte, ela retornou ao açougue e comprou apenas 3,5 quilos de carne e um pacote de carvão, pagando R$ 23,10. Se os preços não sofreram alterações no período em que Maria Helena fez as compras, o preço do quilo da carne que ela comprou foi de

A) R$ 5,40.

B) R$ 5,80.

C) R$ 6,00.

D) R$ 6,10.

04. (PUC Minas–2006) Em uma caixa e em uma cesta, estavam guardadas 210 laranjas. Passando-se 8 laranjas da cesta para a caixa, cada um desses recipientes ficou com o mesmo número de laranjas. O número de laranjas que estavam guardadas na caixa, inicialmente, era

A) 91

B) 97

C) 105

D) 113

05. (UEL-PR–2006) Marlene confecciona tapetes artesanais de dois modelos, redondo e retangular. Num certo mês, ela confeccionou 60 tapetes e teve um lucro líquido de R$ 500,00. Sabendo que cada tapete redondo foi vendido por R$ 10,00, cada tapete retangular por R$ 12,00 e que Marlene gastou R$ 160,00 em materiais, quantos tapetes de cada modelo ela confeccionou nesse mês?

A) 20 redondos e 40 retangulares

B) 30 redondos e 30 retangulares

C) 40 redondos e 20 retangulares

D) 10 redondos e 50 retangulares

E) 50 redondos e 10 retangulares

06. (UFRJ–2006) A soma de dois números é 6, e a soma de seus quadrados é 68. O módulo da diferença desses dois números é

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 10

07. (PUC Rio–2006) **ACHE** um valor de **m** tal que as duas soluções da equação $x(x + 1) = m(x + 2)$ sejam iguais.

08. (UFMG) Um estudante planejou fazer uma viagem de férias e reservou uma certa quantia em dinheiro para o pagamento de diárias. Ele tem duas opções de hospedagem: a Pousada **A**, com diária de R$ 25,00, e a Pousada **B**, com diária de R$ 30,00. Se escolher a Pousada **A**, em vez da Pousada **B**, ele poderá ficar três dias a mais de férias. Nesse caso, é **CORRETO** afirmar que, para o pagamento de diárias, esse estudante reservou

A) R$ 300,00.

B) R$ 600,00.

C) R$ 350,00.

D) R$ 450,00.

09. (UNIFESP–2007) Em uma lanchonete, o custo de 3 sanduíches, 7 refrigerantes e uma torta de maçã é R$ 22,50. Com 4 sanduíches, 10 refrigerantes e uma torta de maçã, o custo vai para R$ 30,50. O custo de um sanduíche, um refrigerante e uma torta de maçã, em reais, é

A) 7,00

B) 6,50

C) 6,00

D) 5,50

E) 5,00

10. (UFSC–2007) Pedro, Luiz, André e João possuem, juntos, 90 CDs. Se tirarmos a metade dos CDs de Pedro, dobrarmos o número de CDs de Luiz, tirarmos 2 CDs de André e aumentarmos em 2 o número de CDs de João, eles ficarão com a mesma quantidade de CDs. **DETERMINE** o número inicial de CDs de André.

11. (UFG–2007) Para se deslocar de casa até o seu trabalho, um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma motocicleta. Considerando que o custo do quilômetro rodado é de 21 centavos para o automóvel e de 7 centavos para a motocicleta, **CALCULE** quantos quilômetros o trabalhador deve andar em cada um dos veículos, para que o custo total mensal seja de R$ 70,00.

12. (UFRRJ) Em uma sala de aula, entram **n** alunos. Se sentarem 2 alunos em cada bancada, 11 ficarão de pé. Porém, se em cada bancada sentarem 3 alunos, haverá 4 bancadas vazias. O número de alunos é

A) 49
B) 57
C) 65
D) 71
E) 82

13. (UEL-PR) Sabe-se que os números reais **α** e **β** são raízes da equação $x^2 - kx + 6 = 0$, na qual $k \in \mathbb{R}$. A equação do 2° grau que admite as raízes $\alpha + 1$ e $\beta + 1$ é

A) $x^2 + (k + 2)x + (k + 7) = 0$
B) $x^2 - (k + 2)x + (k + 7) = 0$
C) $x^2 + (k + 2)x - (k + 7) = 0$
D) $x^2 - (k + 1)x + 7 = 0$
E) $x^2 + (k + 1)x + 7 = 0$

14. (Cesgranrio) Se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 + 57x - 228 = 0$, então $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vale

A) $-\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{1}{6}$ ou $-\frac{1}{6}$

15. (PUC-Campinas-SP) Em agosto de 2000, Zuza gastou R$ 192,00 na compra de algumas peças de certo artigo. No mês seguinte, o preço unitário desse artigo aumentou R$ 8,00 e, com a mesma quantia que gastou em agosto, ele pode comprar duas peças a menos. Em setembro, o preço de cada peça de tal artigo era

A) R$ 24,00.
B) R$ 25,00.
C) R$ 28,00.
D) R$ 30,00.
E) R$ 32,00.

16. (Unicamp-SP) Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500 kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões.

A) Quantos caminhões foram necessários naquele dia?
B) Quantos quilos cada caminhão transportou naquele dia?

17. (FEI-SP) Uma das raízes da equação $x^2 - x - a = 0$ é também raiz da equação $x^2 + x - (a + 20) = 0$. Qual é o valor de **a**?

A) a = 10
B) a = 20
C) a = −20
D) a = 90
E) a = −9

18. (UFMG) O quadrado da diferença entre o número natural **x** e 3 é acrescido da soma de 11 e **x**. O resultado é, então, dividido pelo dobro de **x**, obtendo-se quociente 8 e resto 20. A soma dos algarismos de **x** é

A) 3
B) 4
C) 5
D) 2

19. (UFLA-MG–2007) Para que o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y - a = 0 \end{cases}$$

admita apenas uma solução real, o valor de **a** deve ser

A) 2
B) −5
C) −2
D) 4

20. (UFC–2007) Os números reais não nulos **p** e **q** são tais que a equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes **Δ** e $1 - \Delta$, sendo que **Δ** denota o discriminante dessa equação. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de **q**.

A) −1
B) $-\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{16}$
E) $\frac{7}{8}$

21. (UFLA-MG–2007) Em uma fazenda, é necessário transportar um número de sacos de cimento utilizando cavalos. Colocando-se dois sacos de cimento em cada cavalo, sobram nove sacos, e colocando-se três sacos de cimento em cada cavalo, três cavalos ficam sem carga alguma. **CALCULE** o número de sacos de cimento e o número de cavalos.

22. (UFPE–2007) Júnior compra R$ 5,00 de bananas toda semana. Em certa semana, ele observou que o número de bananas excedia em cinco o número de bananas da semana anterior, e foi informado de que o preço da dúzia de bananas tinha sido diminuído de um real. Quantas bananas ele comprou na semana anterior?

23. (PUC Minas–2006) A diferença entre as raízes reais da equação $x^2 + bx + 40 = 0$ é igual a 6. Então, o valor absoluto de **b** é

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14

24. (PUC Minas–2006) Sejam **p** e **q** números reais não nulos tais que $\frac{p}{2q} + \frac{2q}{p} - 2 = 0$ e $p + q = 6$. Então, o valor de **p** é igual a

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

25. (UFMG–2008) Dois nadadores, posicionados em lados opostos de uma piscina retangular e em raias adjacentes, começam a nadar em um mesmo instante, com velocidades constantes. Sabe-se que, nas duas primeiras vezes em que ambos estiveram lado a lado, eles nadavam em sentidos opostos: na primeira vez, a 15 m de uma borda e, na segunda vez, a 12 m da outra borda. Considerando-se essas informações, é **CORRETO** afirmar que o comprimento dessa piscina é

A) 21 m.
B) 27 m.
C) 33 m.
D) 54 m.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Na cidade de João e Maria, haverá *shows* em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.

Pacote 1: taxa de 40 reais por *show*.

Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por *show*.

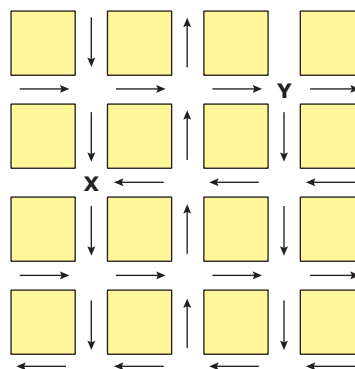
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 *shows*, e 15 reais por cada *show* a mais.

João assistirá a 7 *shows* e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes

A) 1 e 2
B) 2 e 2
C) 3 e 1
D) 2 e 1
E) 3 e 3

02. (Enem–2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto, foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

A) R$ 14,00
B) R$ 17,00
C) R$ 22,00
D) R$ 32,00
E) R$ 57,00

03. (Enem–2009) O mapa a seguir representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.

Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto **X**, demoraria para chegar até o ponto **Y**?

A) 25 min
B) 15 min
C) 2,5 min
D) 1,5 min
E) 0,15 min

04. (Enem–2009) Joana frequenta uma academia de ginástica onde faz exercícios de musculação. O programa de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos em cada série. No aquecimento, ela caminha durante 10 minutos na esteira e descansa durante 60 segundos para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. Entre uma série e outra, assim como ao mudar de aparelho, Joana descansa por 60 segundos. Suponha que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus exercícios às 10h30min e finalizado às 11h7min. Nesse dia e nesse tempo, Joana

A) não poderia fazer sequer a metade dos exercícios e dispor dos períodos de descanso especificados em seu programa.

B) poderia ter feito todos os exercícios e cumprido rigorosamente os períodos de descanso especificados em seu programa.

C) poderia ter feito todos os exercícios, mas teria de ter deixado de cumprir um dos períodos de descanso especificados em seu programa.

D) conseguiria fazer todos os exercícios e cumpriria todos os períodos de descanso especificados em seu programa, e ainda se permitiria uma pausa de 7 min.

E) não poderia fazer todas as 3 séries dos exercícios especificados em seu programa; em alguma dessas séries deveria ter feito uma série a menos e não deveria ter cumprido um dos períodos de descanso.

05. (Enem–2010) Desde 2005, o Banco Central não fabrica mais a nota de R$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior que a do papel. Fabricar uma moeda de R$ 1,00 custa R$ 0,26, enquanto uma nota custa R$ 0,17; entretanto, a cédula dura de oito a onze meses.

Disponível em: <http://noticias.r7.com>. Acesso em: 26 abr. 2010.

Com R$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas cédulas a mais?

A) 1 667

B) 2 036

C) 3 846

D) 4 300

E) 5 882

06. (Enem–2009) Nos últimos anos, o volume de petróleo exportado pelo Brasil tem mostrado expressiva tendência de crescimento, ultrapassando as importações em 2008. Entretanto, apesar de as importações terem se mantido praticamente no mesmo patamar desde 2001, os recursos gerados com as exportações ainda são inferiores àqueles despendidos com as importações, uma vez que o preço médio por metro cúbico do petróleo importado é superior ao do petróleo nacional. Nos primeiros cinco meses de 2009, foram gastos 2,84 bilhões de dólares com importações e gerada uma receita de 2,24 bilhões de dólares com as exportações. O preço médio por metro cúbico em maio de 2009 foi de 340 dólares para o petróleo importado e de 230 dólares para o petróleo exportado. O quadro a seguir mostra os dados consolidados de 2001 a 2008 e dos primeiros cinco meses de 2009.

Comércio exterior de petróleo (milhões de metros cúbicos)

Ano	Importação	Exportação
2001	24,19	6,43
2002	22,06	13,63
2003	19,96	14,03
2004	26,91	13,39
2005	21,97	15,93
2006	20,91	21,36
2007	25,38	24,45
2008	23,53	25,14
2009*	9,00	11,00

*Valores apurados de janeiro a maio de 2009.

Disponível em: <http://www.anp.gov.br>. Acesso em: 15 jul. 2009 (Adaptação).

Considere que as importações e exportações de petróleo de junho a dezembro de 2009 sejam iguais a $\frac{7}{5}$ das importações e exportações, respectivamente, ocorridas de janeiro a maio de 2009. Nesse caso, supondo que os preços para importação e exportação não sofram alterações, qual seria o valor mais aproximado da diferença entre os recursos despendidos com as importações e os recursos gerados com as exportações em 2009?

A) 600 milhões de dólares

B) 840 milhões de dólares

C) 1,34 bilhão de dólares

D) 1,44 bilhão de dólares

E) 2,00 bilhões de dólares

07. (Enem–2010) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1 000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

A) 476
B) 675
C) 923
D) 965
E) 1 538

08. (Enem–2010) O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: <www.cbat.org.br> (Adaptação).

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

A) 4,0 m e 5,0 m.
B) 5,0 m e 6,0 m.
C) 6,0 m e 7,0 m.
D) 7,0 m e 8,0 m.
E) 8,0 m e 9,0 m.

GABARITO

Fixação

01. C
02. A
03. E
04. A
05. B

Propostos

01. E
02. E
03. B
04. B
05. B
06. E
07. $m = -3 + 2\sqrt{2}$ ou $m = -3 - 2\sqrt{2}$
08. D
09. B
10. 22
11. 225 km de automóvel e 325 km de motocicleta
12. B
13. B
14. B
15. E
16. A) 24 caminhões
    B) 2 500 kg
17. D
18. A
19. D
20. D
21. 18 cavalos e 45 sacos de cimento
22. 15
23. D
24. A
25. C

Seção Enem

01. E
02. D
03. D
04. B
05. B
06. C
07. C
08. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 04 FRENTE B

Razões e proporções

Para a, b ∈ ℝ (b ≠ 0), o quociente $\frac{a}{b}$ é chamado razão entre **a** e **b** (nessa ordem, **a** é chamado antecedente, e **b**, consequente).

Para a, b, c, d ∈ ℝ (b ≠ 0, d ≠ 0), a igualdade de razões é chamada proporção.

$$a \div b = c \div d, \text{ também escrita: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Algumas propriedades das proporções

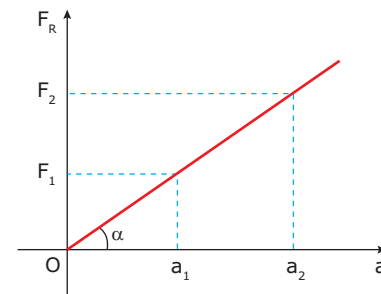
Das propriedades dos números reais, podemos concluir algumas equivalências entre proporções.

Para a, b, c, d ∈ ℝ*, tem-se:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\Leftrightarrow ad = bc$
	$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
	$\Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$
	$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
	$\Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
	$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

NÚMEROS PROPORCIONAIS

Considere um corpo de massa **m**. Sabemos que a razão entre a força resultante que age sobre esse corpo e a sua aceleração é constante e igual a **m**.

Quando duas grandezas possuem razão constante, são chamadas de grandezas diretamente proporcionais. A função por elas determinada é denominada função linear, e o gráfico, se contínuo, é uma reta que passa pela origem.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$$

Exemplo

Para um corpo de massa 2 kg:

F_R(N)	2	4	6	8	10
a(m/s²)	1	2	3	4	5

Duas grandezas, tais que o produto entre elas é sempre constante, são chamadas grandezas inversamente proporcionais. A função por elas determinada é uma função recíproca, e o gráfico é uma hipérbole equilátera.

Exemplo

yx = 8

x	y
–4	–2
–2	–4
–1	–8
1	8
2	4
4	2

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (Unicamp-SP) A quantia de R$ 1 280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se

A) a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

B) a divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Resolução:

Sendo **x**, **y** e **z** a quantia, em reais, que cada pessoa receberá, então:

A) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{8+5+7} = \frac{1\,280}{20} = 64 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{8} = 64 \\ \frac{y}{5} = 64 \\ \frac{z}{7} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 512 \\ y = 320 \\ z = 448 \end{cases}$$

B) $\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} = \frac{1\,280}{\frac{2+5+1}{10}} = 1\,600 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{5}} = 1\,600 \\ \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1\,600 \\ \frac{z}{\frac{1}{10}} = 1\,600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}.1\,600 \\ y = \frac{1}{2}.1\,600 \\ z = \frac{1}{10}.1\,600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 320 \\ y = 800 \\ z = 160 \end{cases}$$

02. (UFOP-MG–2008) Duas torneiras são utilizadas para encher um tanque vazio. Sozinhas, elas levam 10 horas e 15 horas, respectivamente, para enchê-lo. As duas juntas enchem-no em

A) 6 horas.

B) 12 horas e 30 minutos.

C) 25 horas.

D) 8 horas e 15 minutos.

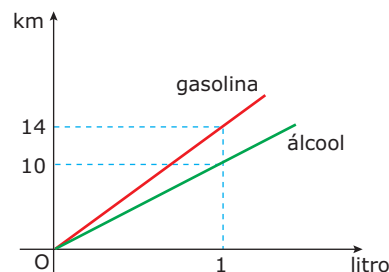
Resolução:

A 1ª torneira possui uma velocidade de enchimento igual a $v_1 = \frac{1}{10}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$, e a 2ª torneira, igual a $v_2 = \frac{1}{15}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$.

As duas torneiras juntas encherão o tanque com uma velocidade $v_{1,2} = v_1 + v_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$, ou seja, encherão 5 tanques em 30 h, ou 1 tanque em 6 h.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UERJ) Analise o gráfico e a tabela.

Combustível	Preço por litro (em reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a

A) $\frac{4}{7}$

B) $\frac{5}{7}$

C) $\frac{7}{8}$

D) $\frac{7}{10}$

02. (UFU-MG) Gumercindo decidiu dividir sua fazenda de 30 alqueires entre seus dois filhos João e José. Essa divisão seria diretamente proporcional à produção que cada filho conseguisse em uma plantação de soja. Eles produziram juntos 1,5 tonelada de soja, sendo que José produziu 250 kg a mais que João. Como foi dividida a fazenda?

03. (FUVEST-SP) O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos, respectivamente, em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que

(1) os valores sejam proporcionais às idades.

(2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.

O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é

A) 1/1/2013.

B) 1/1/2014.

C) 1/1/2015.

D) 1/1/2016.

E) 1/1/2017.

04. (UFU-MG) O orgulho de um colecionador de carros é seu velho fusca que apresenta desempenho de 10 km rodados para cada litro de gasolina, embora já tenha sofrido alguns "reparos" no tanque de combustível. Como esse colecionador irá participar de uma feira de carros em outra cidade com seu fusca, vai até um posto de combustível e abastece o carro com exatamente 30,6 litros de gasolina. Mas, no momento em que o colecionador inicia a viagem, aparece um vazamento no tanque por onde escoa 0,1 litro de gasolina por hora. Sabendo-se que o colecionador pretende desenvolver uma velocidade constante de 50 km/h durante a viagem, a distância **MÁXIMA** que o fusca irá percorrer, até esgotar toda a gasolina do tanque, será de

A) 300 km.
C) 306 km.
B) 240 km.
D) 280 km.

05. (UFG–2007) Para encher um recipiente de 5 litros, uma torneira gasta 12 segundos. Uma segunda torneira gasta 18 segundos para encher o mesmo recipiente. Nessas condições, para encher um tanque de 1 000 litros, usando as duas torneiras ao mesmo tempo, serão necessários

A) 20 minutos.
D) 50 minutos.
B) 24 minutos.
E) 83 minutos.
C) 33 minutos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG–2009) Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; e o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Então, é **CORRETO** afirmar que, nessa compra, a fração correspondente à quantidade de sorvete do sabor chocolate foi

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{5}{12}$

D) $\frac{5}{6}$

02. (Unimontes-MG–2009) Um pai repartiu R$ 33,00 entre seus três filhos, em partes inversamente proporcionais às idades deles, as quais são 2, 4 e 6 anos. O mais novo recebeu

A) R$ 6,00.
C) R$ 16,50.
B) R$ 18,00.
D) R$ 11,00.

03. (UFSCar-SP) Somando-se 4 ao numerador de certa fração, obtém-se outra igual a 1. Subtraindo-se 1 do denominador da fração original, obtém-se outra igual a $\frac{1}{2}$. Os termos da fração original $\frac{A}{B}$ representam os votos de dois candidatos, **A** e **B**, que foram para o 2º turno de uma eleição, em que o candidato **B** obteve

A) 90% dos votos.
B) 70% dos votos.
C) 50% dos votos.
D) 30% dos votos.
E) 10% dos votos.

04. (UFU-MG) Paulo, Ana e Luís formaram uma sociedade e investiram, respectivamente, R$ 2 500,00; R$ 3 500,00 e R$ 4 000,00 num fundo de investimentos. Após um ano, a aplicação estava com um saldo de R$ 12 500,00. Se os três investidores resgatarem somente o rendimento e dividirem-no em partes diretamente proporcionais aos valores investidos, a diferença entre os valores recebidos por Ana e por Paulo será igual a

A) R$ 125,00.
C) R$ 250,00.
B) R$ 1 000,00.
D) R$ 500,00.

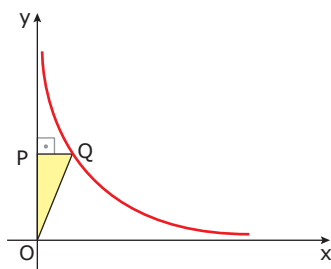
05. (UEL-PR) Sabe-se que a sequência (x, y, z) é inversamente proporcional à sequência $\left(\frac{1}{2}, 2, 4\right)$. Se x + y + z = 176, então x − y é igual a

A) $-\frac{z}{8}$
D) 4z
B) $-\frac{z}{4}$
E) 6z
C) 2z

06. (PUC-Campinas-SP) Segundo a Lei de Boyle-Mariotte, sabe-se que "a uma temperatura constante, os volumes de uma mesma massa de gás estão na razão inversa das pressões que produzem". Se, sob a pressão de 5 atmosferas, uma massa de gás ocupa um volume de 0,6 dm³, a expressão que permite calcular a pressão **P**, em atmosferas, em função do volume **V**, em dm³, ocupado por essa massa de gás, é

A) $V = \frac{3}{P}$
D) $V = \frac{5P}{6}$
B) V = 3P
E) $V = \frac{25}{3P}$
C) $V = \frac{5}{6P}$

MATEMÁTICA

07. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, **Q** é um ponto do gráfico da função y = f(x), com **x** e **y** inversamente proporcionais.

Se $(x, y) = \left(\frac{5}{3}, 480\right)$ é um ponto da curva, então a área do triângulo OPQ é

A) 160

B) 320

C) 380

D) 400

E) 800

08. (VUNESP) Segundo matéria publicada em *O Estado de São Paulo*, 09/06/96, o Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) gasta atualmente 40 bilhões de reais por ano com o pagamento de aposentadorias e pensões de 16 milhões de pessoas. A mesma matéria informa que o Governo Federal gasta atualmente 20 bilhões de reais por ano com o pagamento de um milhão de servidores públicos federais aposentados. Indicando por **x** a remuneração anual média dos beneficiários do INSS e por **y** a remuneração anual média dos servidores federais aposentados, então **y** é igual a

A) 2x

B) 6x

C) 8x

D) 10x

E) 16x

09. (UFU-MG) João e José são aparadores do gramado de um campo de futebol e gastam, respectivamente, 7,5 horas e 6 horas para aparar individualmente todo o gramado. Se João e José trabalharem juntos, quantas horas eles levarão para aparar 75% de todo o gramado?

10. (UEL-PR) José limpa o vestiário de um clube de futebol em 30 minutos, enquanto seu irmão, Jair, limpa o mesmo vestiário em 45 minutos. Quanto tempo levarão os dois para limpar o vestiário juntos?

A) 15 minutos e 30 segundos

B) 18 minutos

C) 20 minutos

D) 36 minutos

E) 37 minutos e 30 segundos

11. (UFMG–2007) Um carro bicombustível percorre 8 km com um litro de álcool e 11 km com um litro do combustível constituído de 75% de gasolina e de 25% de álcool, composição adotada, atualmente, no Brasil. Recentemente, o Governo brasileiro acenou para uma possível redução, nessa mistura, da porcentagem de álcool, que passaria a ser de 20%. Suponha que o número de quilômetros que esse carro percorre com um litro dessa mistura varia linearmente de acordo com a proporção de álcool utilizada. Então, é **CORRETO** afirmar que, se for utilizado um litro da nova mistura proposta pelo Governo, esse carro percorrerá um total de

A) 11,20 km.

B) 11,35 km.

C) 11,50 km.

D) 11,60 km.

12. (UFF-RJ) Em situações do cotidiano, é comum usar-se como unidade de medida o palmo (da própria mão). Porém, essa unidade varia de pessoa para pessoa. João mediu o comprimento de uma peça de tecido e encontrou 30 palmos. Alfredo encontrou, para a mesma peça de tecido, a medida de 27 palmos. Pode-se afirmar que 10 palmos de João equivalem a

A) 0,1 palmo de Alfredo.

B) 0,9 palmo de Alfredo.

C) 9 palmos de Alfredo.

D) 10 palmos de Alfredo.

E) 11,1 palmos de Alfredo.

13. (UFU-MG) Um maratonista calcula que, se correr a uma velocidade constante de 10 km por hora, chegará ao fim do percurso da corrida às 10:00 horas. Contudo, se sua velocidade constante for de 15 km por hora, ele chegará às 8:00 horas. Para que ele chegue exatamente às 9:00 horas, sua velocidade constante deverá ser de

A) 12 km/h.

B) 12,5 km/h

C) 11 km/h.

D) 11,5 km/h.

E) 13 km/h.

14. (UFPE) Uma substância **X** é composta de três elementos **A**, **B** e **C**, na proporção de 2:3:5 partes de volume. Um litro do elemento **A** pesa três vezes mais que um litro do elemento **C**, enquanto um litro do elemento **B** pesa duas vezes mais que um litro do elemento **C**. Se **x** é o quociente entre o peso de um litro da substância **X** e o peso de um litro do elemento **C**, **DETERMINE x**.

15. (Unicamp-SP) Dois navios partiram ao mesmo tempo, de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Trinta minutos após a partida, a distância entre os dois navios era de 15 km e, após mais 15 minutos, um dos navios estava 4,5 km mais longe do porto que o outro.

A) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

B) Qual a distância de cada um dos navios até o porto de saída, 270 minutos após a partida?

16. (Unicamp-SP) Retiraram-se **x** litros de vinho de um barril de 100 litros e adicionaram-se, ao mesmo barril, **x** litros de água. Da mistura resultante no barril, retiram-se outros **x** litros e adicionam-se outros **x** litros de água. Agora o barril contém 64 litros de vinho e 36 de água. **CALCULE** o valor de **x**.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2000) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca **X** é o dobro do número de carros roubados da marca **Y**, e as marcas **X** e **Y** juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca **Y** é

A) 20

B) 30

C) 40

D) 50

E) 60

02. (Enem–2009) *As abelhas domesticadas da América do Norte e da Europa estão desaparecendo, sem qualquer motivo aparente. As abelhas desempenham papel fundamental na agricultura, pois são responsáveis pela polinização (a fecundação das plantas). Anualmente, apicultores americanos alugam 2 milhões de colmeias para polinização de lavouras. O sumiço das abelhas já inflacionou o preço de locação das colmeias. No ano passado, o aluguel de cada caixa (colmeia) com 50 000 abelhas estava na faixa de 75 dólares. Depois do ocorrido, aumentou para 150 dólares. A previsão é que faltem abelhas para polinização neste ano nos EUA. Somente as lavouras de amêndoa da Califórnia necessitam de 1,4 milhões de colmeias.*

Disponível em: <http://veja.abril.com.br>.
Acesso em: 23 fev. 2009 (Adaptação).

De acordo com essas informações, o valor a ser gasto pelos agricultores das lavouras de amêndoa da Califórnia com o aluguel das colmeias será de

A) 4,2 mil dólares.

B) 105 milhões de dólares.

C) 150 milhões de dólares.

D) 210 milhões de dólares.

E) 300 milhões de dólares.

03. (Enem–2009) Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R$ 120,00 por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R$ 600,00 semanais e, como um estímulo, também propôs que na semana na qual ele vendesse R$ 1 200,00, ele receberia R$ 200,00, em vez de R$ 120,00. Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de

A) R$ 160,00.
B) R$ 165,00.
C) R$ 172,00.
D) R$ 180,00.
E) R$ 198,00.

04. (Enem–2009) *Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.*

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>.
Acesso em: 12 jul. 2009 (Adaptação).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final dísel / biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

A) 27,75 milhões de litros

B) 37,00 milhões de litros

C) 231,25 milhões de litros

D) 693,75 milhões de litros

E) 888,00 milhões de litros

05. (Enem–2009) *O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que* $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, *NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.*

Portaria nº 148, 27 de abr. 2006 (Adaptação).

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5. Se NA + NV = 3 600, então NF é igual a

A) 10 000
B) 7 500
C) 5 000
D) 4 500
E) 3 000

06. (Enem–2009) Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é Spa-Francorchamps, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km. Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no box para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,

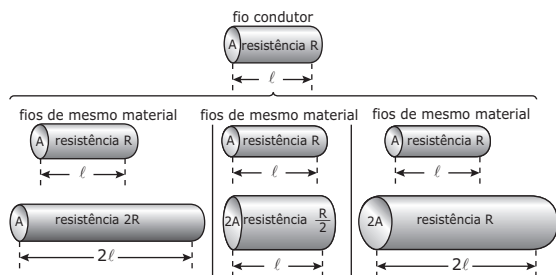
A) 617 kg.
B) 668 kg.
C) 680 kg.
D) 689 kg.
E) 717 kg.

07. (Enem–2010)

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

Disponível em: <http://www.efeitojoule.com>. Acesso em: abr. 2010 (Adaptação).

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

A) direta, direta e direta.
B) direta, direta e inversa.
C) direta, inversa e direta.
D) inversa, direta e direta.
E) inversa, direta e inversa.

GABARITO

Fixação

01. D
02. José: 17,5 alqueires
    João: 12,5 alqueires
03. D
04. A
05. B

Propostos

01. C
02. B
03. B
04. C
05. E
06. A
07. D
08. C
09. 2,5 horas
10. B
11. A
12. C
13. A
14. x = 1,7
15. A) 24 km/h e 18 km/h
    B) 108 km e 81 km
16. x = 20

Seção Enem

01. B
02. D
03. C
04. D
05. C
06. B
07. C

MATEMÁTICA

Função

MÓDULO 03 FRENTE C

CONCEITOS BÁSICOS

Produto cartesiano

O produto cartesiano A x B de dois conjuntos **A** e **B** não vazios é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), nos quais **x** pertence a **A**, e **y** pertence a **B**.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {1, 5}. Obter os produtos cartesianos A x B, A^2 e B x A.

Resolução:

A x B = {(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5)}

A^2 = {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

B x A = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)}

Relação

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, definimos uma relação **R** de **A** em **B** como um subconjunto de A x B.

Considere A = {–1, 0, 1, 2} e B = {1, 2}.

A x B = {(–1, 1), (–1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

Assim, duas relações de **A** em **B** poderiam ser:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2)\}$

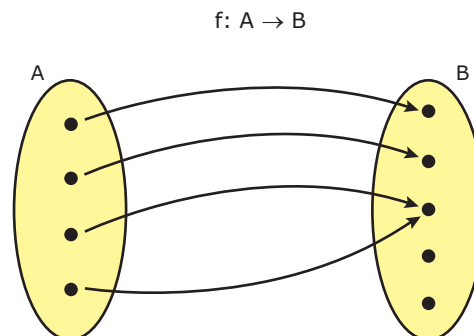
DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, uma relação **f** de **A** em **B** é função de **A** em **B** se, e somente se, para todo $x \in A$ se associa a um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

Sistema de notação

A função **f** de **A** em **B** pode ser indicada por f: A → B.

Esquematicamente, temos:

f: A → B

Em outras palavras, cada um dos elementos do conjunto **A** está relacionado a um único elemento do conjunto **B**.

No diagrama anterior, definimos o seguinte:

i) O conjunto **A** é o domínio da função.

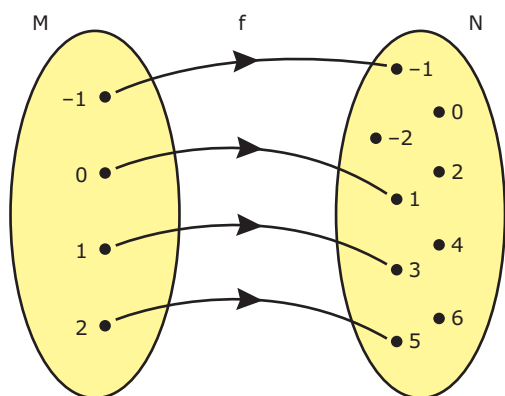
ii) O conjunto **B** é o contradomínio da função.

iii) Os elementos do contradomínio que estão relacionados, por setas, com os elementos de **A** formam o conjunto imagem da função.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

Algumas funções têm a sua lei de correspondência definida por fórmulas. Por exemplo, sejam dois conjuntos M = {–1, 0, 1, 2} e N = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seja **f** uma função que associa a cada elemento de **M** o seu dobro, acrescido de uma unidade. Denotando por **x** um elemento genérico do domínio **M** e denotando por **y** a sua correspondente imagem no conjunto **N**, temos a fórmula:

$$y = 2x + 1, x \in M$$

- Para $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 \Rightarrow y = -1$;
- Para $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 \Rightarrow y = 1$;
- Para $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 \Rightarrow y = 3$;
- Para $x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 \Rightarrow y = 5$.

Dizemos que **x** é a variável independente, e **y**, a variável dependente. Assim, a variável **y** é dita função de **x,** e escrevemos y = f(x).

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Determinar o domínio de uma função significa saber para quais valores de **x** a expressão matemática **y** está definida, ou seja, quais valores podem ser atribuídos à variável **x** de modo a não violar as condições de existência da expressão matemática.

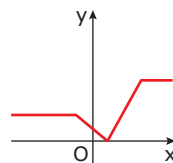
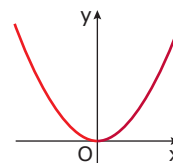
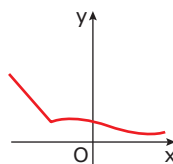
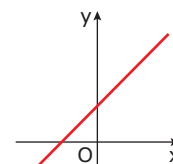
Exemplos

1º) Na função y = 3x + 7, para qualquer valor real de **x** existe uma imagem **y** correspondente. Logo, o domínio dessa função é $D = \mathbb{R}$.

2º) Na função $y = \frac{1}{x-4}$, devemos observar que x – 4 é denominador de uma fração e, portanto, deve ser diferente de zero, ou seja, $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Então, o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$.

3º) Na função $y = \sqrt{x-5}$, devemos observar que x – 5 é o radicando de uma raiz quadrada. Esse radicando deve ser maior ou igual a zero, ou seja, $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Então, o domínio dessa função deve ser $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

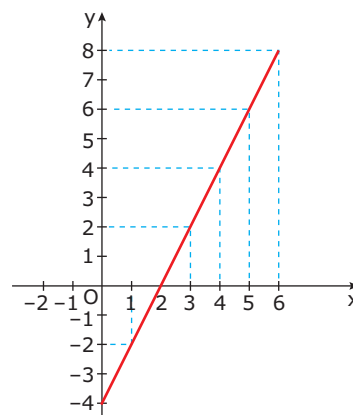
O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado pelo conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que y = f(x). Seguem alguns exemplos de gráficos de funções:

Exemplo

Dada a função $f: A \to \mathbb{R}$, na qual f(x) = 2x – 4 e A = [0, 6], representar o seu gráfico no plano cartesiano.

Resolução:

Vamos escolher alguns valores para **x** dentro do domínio **A** fornecido e substituí-los na expressão matemática dada. Com os resultados, temos a seguinte tabela:

x	y
0	–4
1	–2
2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

Marcando esses pares (x, y) no plano cartesiano, obtemos o gráfico da função.

RECONHECIMENTO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Observe os seguintes gráficos.

Gráfico I

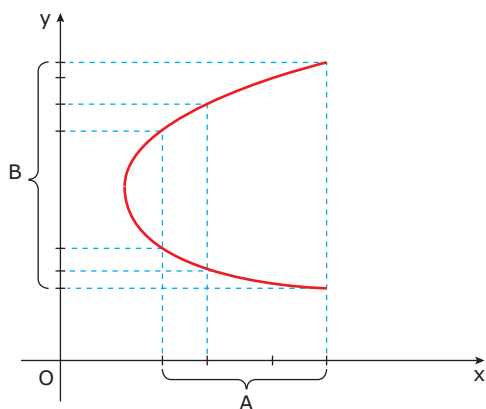
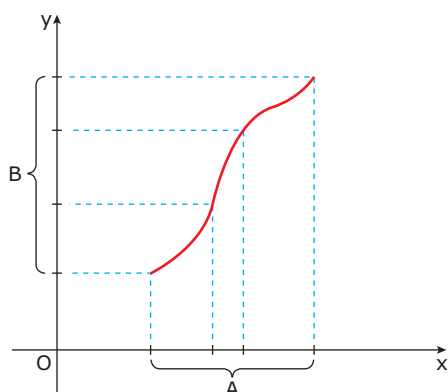



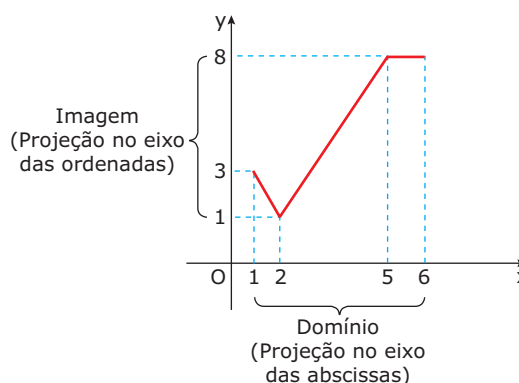
Gráfico II

Sejam **A** e **B** os intervalos numéricos destacados em cada gráfico.

No gráfico I, existem elementos do conjunto **A** que estão relacionados com mais de um elemento do conjunto **B**. Portanto, tal gráfico não representa uma função de **A** em **B**.

No gráfico II, cada elemento de **A** está relacionado com um único elemento de **B**. Portanto, tal gráfico representa uma função de **A** em **B**.

> De modo geral, para verificarmos se um gráfico representa uma função de **A** em **B**, basta traçarmos retas paralelas ao eixo Oy a partir dos elementos de **A**. Assim, se cada reta interceptar o gráfico em um único ponto, trata-se do gráfico de uma função.

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DO SEU GRÁFICO

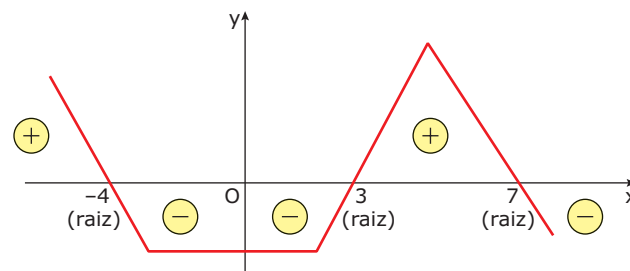
Considere o gráfico da função a seguir:

Observe que a função está definida para um intervalo limitado de valores de **x**, a saber, o intervalo [1, 6]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das abscissas, é o domínio da função. Os correspondentes valores de **y** são dados pelo intervalo [1, 8]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das ordenadas, é a imagem da função.

Portanto, temos domínio: D = [1, 6] e imagem: Im = [1, 8].

ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO

Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** os correspondentes valores de **y** são negativos, nulos ou positivos.

Exemplo

Considere o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir:

Analisando o gráfico anterior, temos:

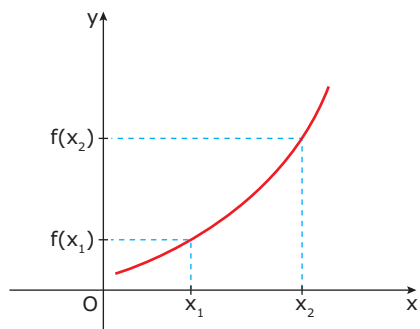
i) Para $-4 < x < 3$ ou $x > 7$, os valores correspondentes de **y** são negativos. Apresentamos esse fato com os sinais de menos indicados no gráfico.

ii) Para $x = -4$, $x = 3$ ou $x = 7$, a ordenada correspondente é nula. Esses pontos são chamados raízes ou zeros da função.

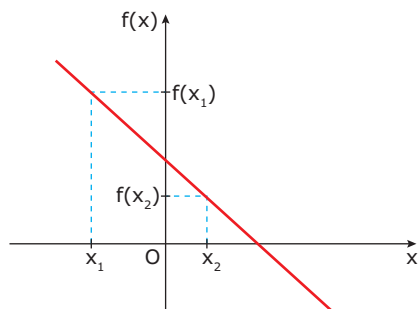
iii) Para $x < -4$ ou $3 < x < 7$, os valores correspondentes de **y** são positivos. Apresentamos esse fato com os sinais de mais indicados no gráfico.

FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

i) **Função crescente:** Uma função é dita crescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** também aumentam.

Exemplo

ii) **Função decrescente:** Uma função é dita decrescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_2) < f(x_1)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** diminuem.

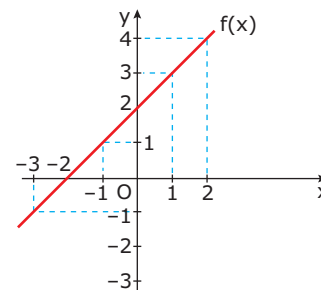
Exemplo

iii) **Função constante:** Uma função é dita constante quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, temos $f(x_1) = f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** permanecem iguais.

Exemplo

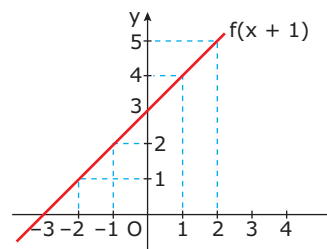
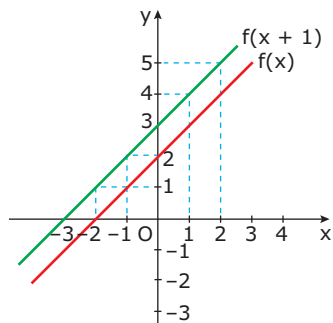
GRÁFICOS: TRANSLAÇÕES E REFLEXÕES

Em várias situações, é possível efetuar a construção de gráficos mais complexos a partir de translações ou reflexões de gráficos de funções mais simples.

1) Tomemos como exemplo o gráfico da função $f(x) = x + 2$, com domínio $\mathbb{R}$.

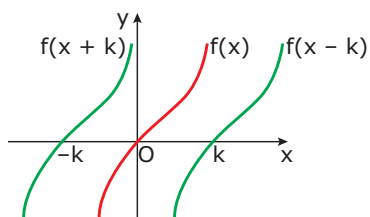
x	f(x)= x + 2
–3	–1
–2	0
–1	1
0	2
1	3
2	4

Como seria o gráfico da função $f(x + 1)$ para todo **x** real? Para responder a essa pergunta, tomemos os seguintes valores tabelados:

x	f(x +1) = (x + 1) + 2 = x + 3
–3	0
–2	1
–1	2
0	3
1	4
2	5

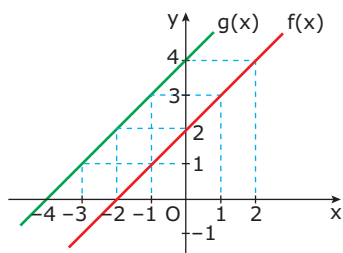
O gráfico correspondente é:

Observe que o gráfico da função f(x + 1) equivale ao gráfico da função f(x) deslocado uma unidade para a esquerda. Portanto, o gráfico de f(x + 1) é obtido pela translação de uma unidade para a esquerda do gráfico de f(x).

De maneira geral, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio ℝ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função f(x + k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades para a esquerda.

ii) O gráfico da função f(x − k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades para a direita.

Exemplo

2) Considere, ainda, o gráfico da função f(x) = x + 2 para todo **x** real. Seja uma função g: ℝ → ℝ dada por g(x) = 2 + f(x). Assim, temos:

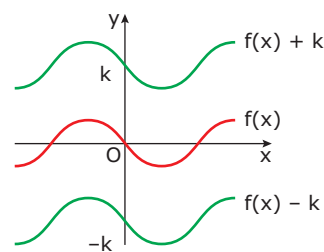
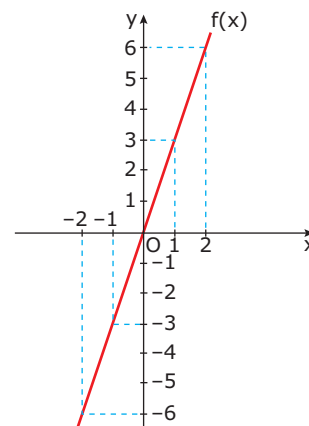
x	f(x) = x + 2	g(x) = 2 + f(x)
−3	−1	1
−2	0	2
−1	1	3
0	2	4
1	3	5
2	4	6

Na figura a seguir, encontram-se representados os gráficos das funções f(x) e g(x) em um mesmo sistema cartesiano.

Observe que o gráfico de g(x) é obtido pela translação do gráfico de f(x) duas unidades para cima.

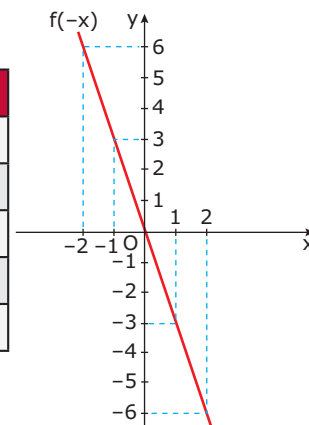
Generalizando, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio ℝ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função g(x) = f(x) + k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para cima**.

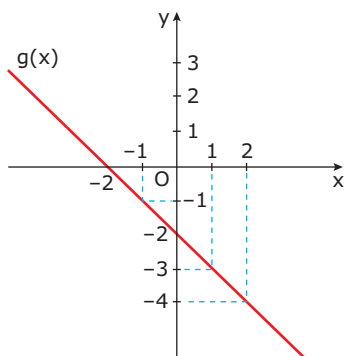
ii) O gráfico da função g(x) = f(x) − k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para baixo**.

Exemplo

3) Considere, a seguir, o gráfico da função f(x) = 3x com domínio ℝ.

x	f(x) = 3x
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

Agora, vamos construir o gráfico da função f(−x) para todo **x** real.

x	f(−x) = 3(−x) = −3x
−2	6
−1	3
0	0
1	−3
2	−6

Observe que o gráfico da função f(−x) é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo **y**, do gráfico da função f(x).

4) Novamente, vamos utilizar o exemplo da função $f(x) = x + 2$, cujo gráfico foi representado no item 1. A partir desse exemplo, iremos construir o gráfico da função $g(x) = -f(x)$.

x	f(x) = x + 2	g(x) = –f(x)
–2	0	0
–1	1	–1
0	2	–2
1	3	–3
2	4	–4

Observe que o gráfico da função $-f(x)$ é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo **x**, do gráfico da função $f(x)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFPA) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. Qual das afirmativas a seguir é **VERDADEIRA**?

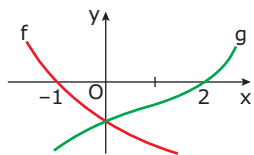
A) $f: x \to 2x$ é uma função de **A** em **B**.

B) $f: x \to x + 1$ é uma função de **A** em **B**.

C) $f: x \to x^2 - 3x + 2$ é uma função de **A** em **B**.

D) $f: x \to x^2 - x$ é uma função de **B** em **A**.

E) $f: x \to x - 1$ é uma função de **B** em **A**.

02. (UFMG) Na figura, estão esboçados os gráficos de duas funções **f** e **g**. O conjunto $\{x \in \mathbb{R}: f(x).g(x) < 0\}$ é dado por

A) $x > 0$ ou $x < -1$

B) $-1 < x < 0$

C) $0 < x < 2$

D) $-1 < x < 2$

E) $x < -1$ ou $x > 2$

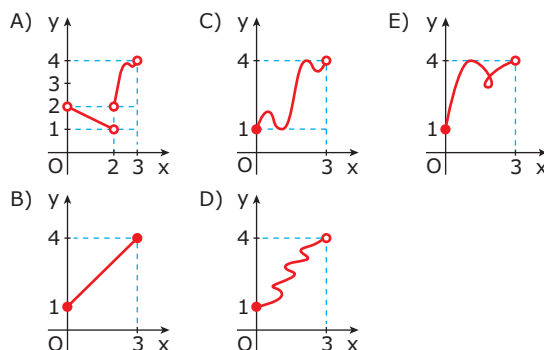
03. (UFMG) Dos gráficos, o **ÚNICO** que representa uma função de imagem $\{y \in \mathbb{R}: 1 \le y \le 4\}$ e domínio $\{x \in \mathbb{R}: 0 \le x < 3\}$ é

A)

C)

E)

B)

D)

04. (UFMG) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(5x) = 5 f(x)$ para todo número real **x**. Se $f(25) = 75$, então o valor de $f(1)$ é

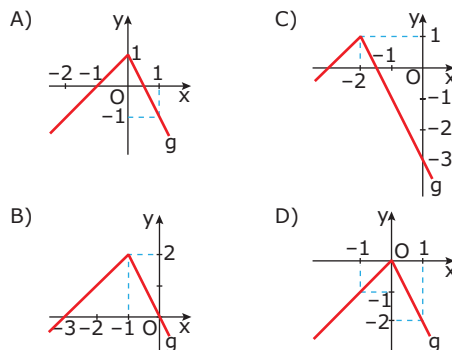
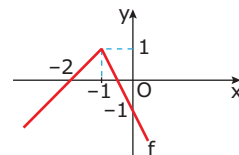
A) 3 B) 5 C) 15 D) 25 E) 45

05. (UFU-MG) Se **f** é uma função cujo gráfico é dado a seguir, então o gráfico da função **g**, tal que $g(x) = f(x - 1)$, será dado por

A)

C)

B)

D)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

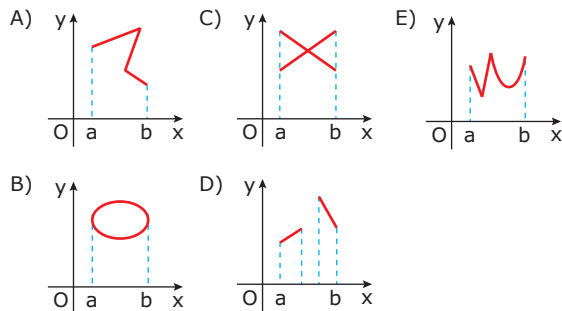
01. (UFMG) Das figuras a seguir, a **ÚNICA** que representa o gráfico de uma função real $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, é

A)

C)

E)

B)

D)

02. (UFMG–2010) Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é racional} \\ \frac{1}{x}, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é irracional} \end{cases}$$

Então, é **CORRETO** afirmar que o **MAIOR** elemento do conjunto $\left\{f\left(\frac{7}{31}\right), f(1), f(3{,}14), f\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é

A) $f\left(\frac{7}{31}\right)$

B) f(1)

C) f(3,14)

D) $f\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)$

03. (UFMG) Suponha-se que o número f(x) de funcionários necessários para distribuir, em um dia, contas de luz entre **x** por cento de moradores, numa determinada cidade, seja dado pela função $f(x) = \frac{300x}{150 - x}$. Se o número de funcionários necessários para distribuir, em um dia, as contas de luz foi 75, a porcentagem de moradores que as receberam é

A) 25

B) 30

C) 40

D) 45

E) 50

04. (UFMG) Em uma experiência realizada com camundongos, foi observado que o tempo requerido para um camundongo percorrer um labirinto, na enésima tentativa, era dado pela função $f(n) = \left(3 + \frac{12}{n}\right)$ minutos. Com relação a essa experiência, pode-se afirmar que um camundongo

A) consegue percorrer o labirinto em menos de três minutos.

B) gasta cinco minutos e 40 segundos para percorrer o labirinto na quinta tentativa.

C) gasta oito minutos para percorrer o labirinto na terceira tentativa.

D) percorre o labirinto em quatro minutos na décima tentativa.

E) percorre o labirinto, numa das tentativas, em três minutos e 30 segundos.

05. (UECE) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tal que f(1) = 4 e f(x + 1) = 4 f(x) para todo real. Nessas condições, f(10) é igual a

A) 2^{-10}

B) 4^{-10}

C) 2^{10}

D) 4^{10}

06. (UFMG) Seja $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Se $x \neq 0$, uma expressão para $f\left(\frac{1}{x}\right)$ é

A) $x^2 + 1$

B) $\frac{x^2 + 1}{x^2}$

C) $\frac{1}{x^2 + 1}$

D) $\frac{x^2}{x^2 + 1}$

E) N.d.a.

07. (UFMG) Seja $f(x) = 3^{2x}$. Sabendo-se que f(x + h) = 9 f(x) para todo valor real de **x**, o valor de **h** é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

08. (UFMG) Se **f** é uma função tal que f(1) = 3 e f(x + y) = f(x) + f(y) para qualquer **x** e **y** reais, então f(2) é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

09. (UFMG) Sendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para x > 0, o valor de $f\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$ é igual a

A) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

B) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

C) $\sqrt[4]{x}$

D) $\sqrt{x}$

E) $\frac{1}{x}$

10. (UFMG) Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. O valor da expressão $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, para $x \neq a$, é

A) 0

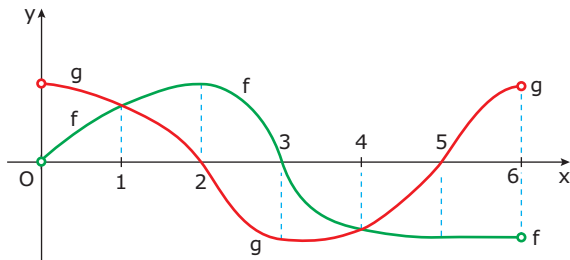
B) –1

C) $-\frac{1}{ax}$

D) $-\frac{1}{x - a}$

E) a – x

MATEMÁTICA

11. (UFMG–2008) Neste plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções y = f(x) e y = g(x), ambas definidas no intervalo aberto]0, 6[.

Seja **S** o subconjunto de números reais definido por $S = \{x \in \mathbb{R};\ f(x).g(x) < 0\}$. Então, é **CORRETO** afirmar que **S** é

A) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 6\}$

B) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 4 < x < 5\}$

C) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 5\}$

D) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 6\}$

12. (UFMG) Se $f(x) = a^x$, pode-se afirmar que $\frac{f(x+1) - f(x-1)}{f(2) - 1}$ é igual a

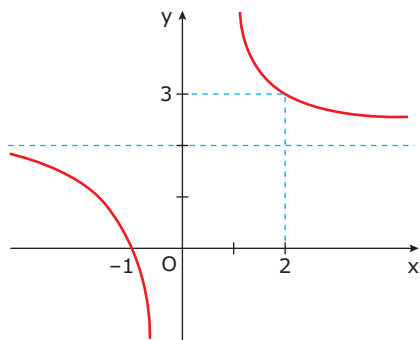
A) f(x – 1)

B) f(x)

C) f(x + 1)

D) $\frac{2\,f(1)}{f(2) - 1}$

E) $\frac{f(2)}{f(2) - 1}$

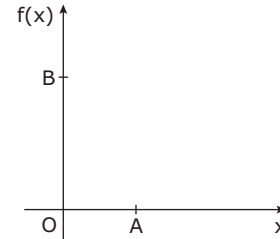
13. (Mackenzie-SP) Se a curva dada é o gráfico da função $y = a + \frac{b}{x}$, então o valor de a^b é

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

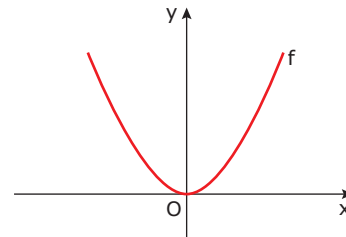
B) $\sqrt{3}$

C) 2

D) 4

E) $\frac{1}{4}$

14. (UFMG) Observe a figura a seguir. Nela, estão representados o ponto **A**, cuja abscissa é 1, e o ponto **B**, cuja ordenada é 5. Esses dois pontos pertencem ao gráfico da função $f(x) = (x + 1)(x^3 + ax + b)$, em que **a** e **b** são números reais. Assim, o valor de f(4) é

A) 65 B) 115 C) 170 D) 225

15. (CEFET-MG–2009) Sejam a função real **f**, do segundo grau, definida graficamente por

e **k** uma constante real tal que k > 0. O gráfico que **MELHOR** representa a função **g** tal que g(x) = f(x – k) + k é

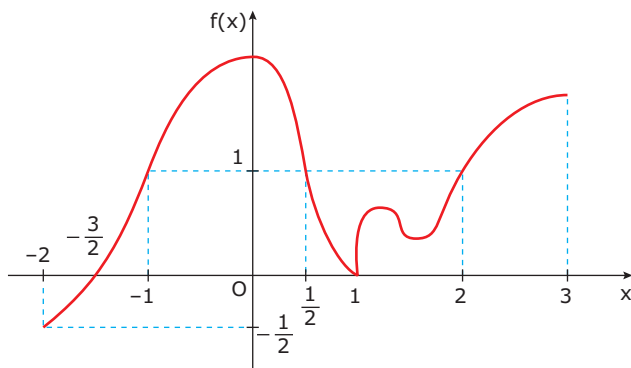
A)

B)

C)

D)

E)

16. (UFMG) Considere a função y = f(x), que tem como domínio o intervalo $\{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq 3\}$ e que se anula somente em $x = -\frac{3}{2}$ e x = 1, como se vê nesta figura:

Assim, para quais valores reais de **x** se tem $0 < f(x) \leq 1$?

A) $\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{3}{2} < x \leq -1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leq x < 1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: 1 < x \leq 2\right\}$

B) $\left\{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq -\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 3\right\}$

C) $\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{3}{2} \leq x \leq -1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R}: -\frac{3}{2} < x \leq -1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

17. (UNESP) Uma pessoa parte de carro de uma cidade **X** com destino a uma cidade **Y**. Em cada instante **t** (em horas), a distância que falta percorrer até o destino é dada, em dezenas de quilômetros, pela função **D**, definida por

$$D(t) = 4.\left(\frac{t+7}{t^2+1} - 1\right)$$

Considerando o percurso da cidade **X** até a cidade **Y**, a distância, em média, por hora, que o carro percorreu foi

A) 40 km.

B) 60 km.

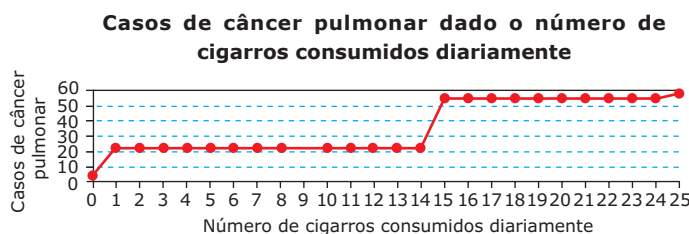
C) 80 km.

D) 100 km.

E) 120 km.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) *A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Entre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir:*

Casos de câncer pulmonar dado o número de cigarros consumidos diariamente

Centers of Disease Control and Prevention CDC-EIS. Summer Course, 1992 (Adaptação).

De acordo com as informações do gráfico,

A) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

B) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

C) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

D) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

E) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

02. (Enem–2010) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

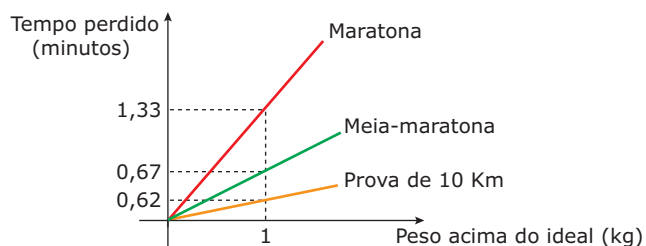
$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geq 100 \end{cases}$$

em que **T** é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e **t** é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 ºC e retirada quando a temperatura for 200 ºC. O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

A) 100 B) 108 C) 128 D) 130 E) 150

03. (Enem–2002) O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2 km), a meia-maratona (21,1 km) ou uma prova de 10 km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico.

Altura (m)	Peso (Kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
⋮	⋮

Tempo x Peso
(Modelo Wilmore e Behnke)

Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em

A) 0,32 minuto.

B) 0,67 minuto.

C) 1,60 minuto.

D) 2,68 minutos.

E) 3,35 minutos.

04. (Enem–2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo **t**, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3\,000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3\,000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante t = 0 e, também, no tempo **t** igual a

A) 1,3 h.

B) 1,69 h.

C) 10,0 h.

D) 13,0 h.

E) 16,9 h.

GABARITO

Fixação

01. C
02. E
03. C
04. A
05. A

Propostos

01. E
02. C
03. B
04. E
05. D
06. D
07. B
08. D
09. C
10. C
11. A
12. A
13. D
14. D
15. E
16. A
17. C

Seção Enem

01. E
02. D
03. E
04. A

MATEMÁTICA

Função afim

MÓDULO 04 FRENTE C

INTRODUÇÃO

Chamamos de função polinomial do primeiro grau, ou função afim, a toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$, sendo **a** e **b** números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função afim é uma reta.

Na função $f(x) = ax + b$, temos:

i) O número **a** é chamado coeficiente angular, inclinação ou declividade.

ii) O número **b** é chamado coeficiente linear.

Exemplos

1º) $y = 3x + 5$

2º) $f(x) = -4x + 17$

3º) $y = -8x$

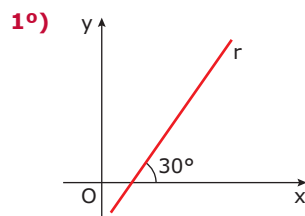
4º) $f(x) = x - 5$

CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

O coeficiente angular **a** é definido como a tangente do ângulo formado pela reta e pelo eixo **x**, tomado no sentido anti-horário. Esse ângulo é chamado de ângulo de inclinação.

Exemplo

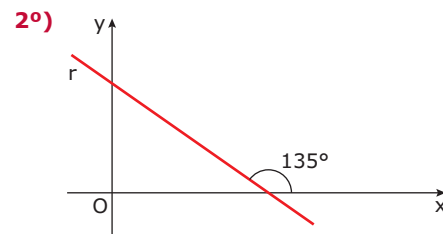
Calcular o coeficiente angular da reta **r** em cada caso.

1º)

O coeficiente angular é dado por $a = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é agudo, temos que sua tangente é positiva.

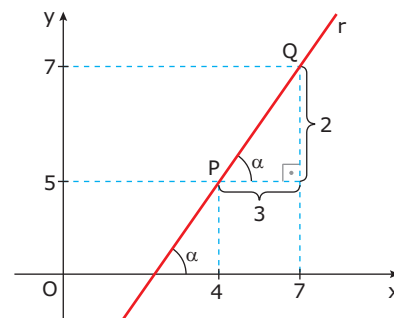
Assim, para $a > 0$, a função é crescente.

2º)

O coeficiente angular é dado por $a = \text{tg } 135° = -1$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é obtuso, temos que sua tangente é negativa.

Assim, para $a < 0$, a função é decrescente.

3º) **r** contém os pontos P = (4, 5) e Q = (7, 7).

O ângulo de inclinação é indicado na figura por **α**. Assim, temos $a = \text{tg } \alpha$.

Logo, a tangente do ângulo **α** pode ser calculada no triângulo retângulo indicado.

Daí, $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$, ou seja, $a = \frac{2}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim. O coeficiente angular **a** é dado por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou, então, } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ em que } \begin{cases} \Delta y \to \text{variação em } \mathbf{y} \\ \Delta x \to \text{variação em } \mathbf{x} \end{cases}.$$

ESBOÇO DO GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma y = ax + b, é conveniente conhecermos os pontos de interseção desse gráfico com os eixos coordenados.

i) Interseção da reta com o eixo Oy

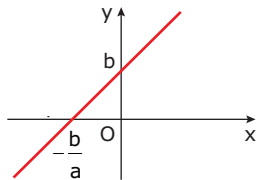
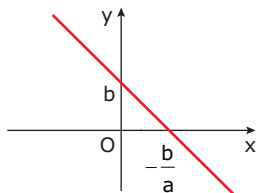
Fazendo x = 0, temos y = a.0 + b = b. Logo, o ponto de interseção da reta com o eixo Oy é dado pelo ponto (0, b).

ii) Interseção da reta com o eixo Ox

Fazendo y = 0, temos 0 = ax + b, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

Esse valor é chamado **raiz** ou **zero** da função. Portanto, o ponto de interseção da reta com o eixo Ox é dado por $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Marcando esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas, temos:

a > 0 (função crescente)

a < 0 (função decrescente)

Exemplo

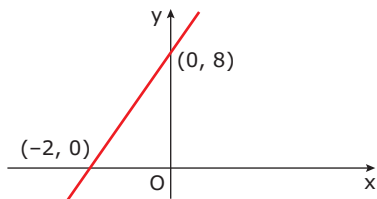
Construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que f(x) = 4x + 8.

Resolução:

Temos a = 4 e b = 8.

O número **b** indica a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy. Logo, esse ponto é igual a (0, 8).

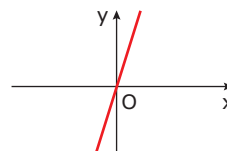
O número $-\frac{b}{a}$ indica a abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo Ox. Temos: $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2$. Logo, esse ponto é igual a (–2, 0).

Marcando esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, basta uni-los para obter o esboço da reta.

OBSERVAÇÃO

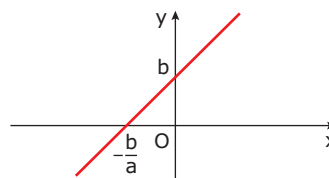
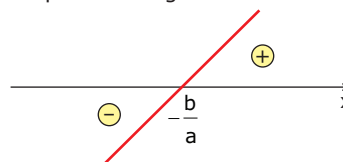
Considere uma função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax + b. Se b = 0, a função é chamada função linear, e seu gráfico é uma reta passando pela origem do sistema de coordenadas.

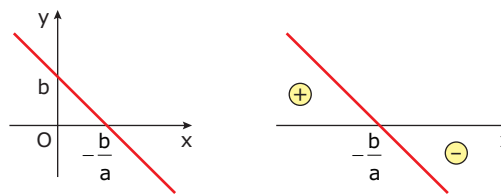
Exemplo

Esboçar o gráfico da função linear y = 3x.

Resolução:

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Estudar o sinal de uma função f(x) significa descobrir os valores de **x** para os quais f(x) < 0 ou f(x) = 0 ou f(x) > 0.

Como exemplo, tomemos o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que y = ax + b, com a > 0.

Observe que $-\frac{b}{a}$ é o ponto no qual a função é nula, ou seja, é uma raiz. Para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos. Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos**.** Indicamos esses resultados no esquema a seguir:

Os sinais **–** e **+** representam os sinais de **y** para o intervalo de **x** considerado.

Analogamente, com a < 0, observamos que, para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos. Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos. Indicamos esses resultados no esquema a seguir:

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Exemplo

Resolver cada inequação a seguir:

1º) $3x - 7 > 0$

Resolução:

$3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$

Conjunto solução (S): $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\right\}$

2º) $\frac{x - 4}{3} \leq 2x - 5$

Resolução:

$x - 4 \leq 6x - 15 \Rightarrow -5x \leq -11$

Multiplicando os dois membros por -1, temos:

$5x \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{11}{5}\right\}$

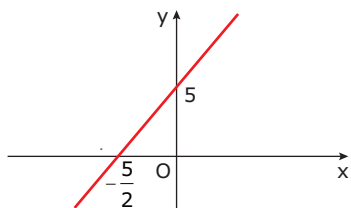
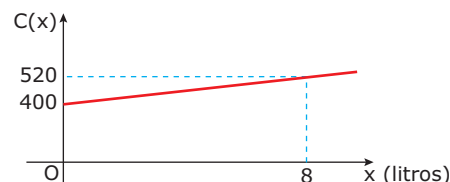
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Encontrar a expressão matemática e fazer um esboço do gráfico da função afim que contém os pontos A = (1, 7) e B = (−3, −1).

Resolução:

A expressão geral da função afim é dada por $y = ax + b$. Substituindo as coordenadas dos pontos **A** e **B**, temos o sistema linear: $\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos a = 2 e b = 5. Portanto, a expressão da função é $y = 2x + 5$. Para esboçarmos o seu gráfico, é necessário encontrar as suas interseções com os eixos coordenados. Fazendo x = 0, temos que y = 5. Fazendo y = 0, temos que $x = -\frac{5}{2}$ (raiz). Portanto, os pontos (0, 5) e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ indicam as interseções com os eixos Oy e Ox, respectivamente.

Esboço do gráfico:

02. O custo **C** de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com $x \geq 9$, cujo gráfico está representado a seguir:

Nessas condições, quantos litros devem ser produzidos de modo que o custo de produção seja igual a R$ 580,00?

Resolução:

Uma função afim é da forma C(x) = ax + b. Do gráfico, temos que C(0) = 400. Mas, C(0) = b. Logo, b = 400.

Sabemos que C(8) = a.8 + b = 520. Substituindo o valor de **b**, temos $8a + 400 = 520 \Rightarrow 8a = 120 \Rightarrow a = 15$.

Portanto, o custo de produção é dado por C(x) = 15x + 400. Fazendo C(x) = 580, temos:

$15x + 400 = 580 \Rightarrow 15x = 180 \Rightarrow x = 12$

Portanto, devem ser produzidos 12 litros.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) *Em 2000, a porcentagem de indivíduos brancos na população dos Estados Unidos era de 70% e de outras etnias – latinos, negros, asiáticos e outros – constituíam os 30% restantes. Projeções do órgão do Governo norte-americano encarregado do censo indicam que, em 2020, a porcentagem de brancos deverá ser de 62%.*

NEWSWEEK INTERNATIONAL, 29 abr. 2004.

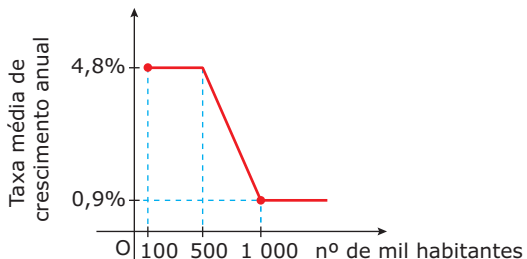
Admite-se que essas porcentagens variam linearmente com o tempo. Com base nessas informações, é **CORRETO** afirmar que os brancos serão minoria na população norte-americana a partir de

A) 2050 B) 2060 C) 2070 D) 2040

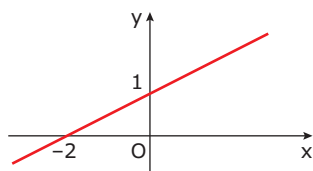
02. (UNESP–2007) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função f(h) = 17h, em que **h** indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função g(h) = (15,3)h. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é

A) 2 501
B) 2 601
C) 2 770
D) 2 875
E) 2 970

MATEMÁTICA

03. (UFRGS–2006) Considere o gráfico a seguir, que apresenta a taxa média de crescimento anual de certas cidades em função do número de seus habitantes.

A partir desses dados, pode-se afirmar que a taxa média de crescimento anual de uma cidade que possui 750 000 habitantes é

A) 1,95%.
B) 2,00%.
C) 2,85%.
D) 3,00%.
E) 3,35%.

04. (PUC Minas) O gráfico da função f(x) = ax + b está representado na figura.

O valor de a + b é

A) –1
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{3}{2}$
D) 2

05. (PUC-SP–2009) O prefeito de certa cidade solicitou a uma equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada um dos ônibus de uma determinada linha. Para tal, os membros da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos – uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do combustível – e que os rendimentos seriam calculados multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela a seguir apresenta esses valores para um único ônibus de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008.

	Outubro
Quantia fixa (reais)	1 150
Consumo de combustível (litros/100 km)	40
Custo de 1 litro de combustível (reais)	4
Rendimentos/km (reais)	2
Distância percorrida (km)	x

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a **MENOR** quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no mês para que os gastos não superem o rendimento é

A) 2 775
B) 2 850
C) 2 875
D) 2 900
E) 2 925

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Cesgranrio) O valor de um carro novo é de R$ 9 000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$ 4 000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é

A) R$ 8 250,00.
B) R$ 8 000,00.
C) R$ 7 750,00.
D) R$ 7 500,00.
E) R$ 7 000,00.

02. (UFES) Uma produtora pretende lançar um filme em fita de vídeo e prevê uma venda de 20 000 cópias. O custo fixo de produção do filme foi R$ 150 000,00, e o custo por unidade foi de R$ 20,00 (fita virgem, processo de copiar e embalagem). Qual o preço **MÍNIMO** que deverá ser cobrado por fita, para não haver prejuízo?

A) R$ 20,00
B) R$ 22,50
C) R$ 25,00
D) R$ 27,50
E) R$ 35,00

03. (PUC Minas) Uma função do 1º grau é tal que f(–1) = 5 e f(3)= –3. Então, f(0) é igual a

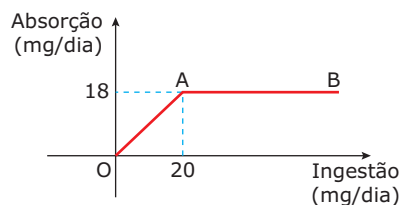
A) 0
B) 2
C) 3
D) 4
E) –1

04. (UFV-MG) Uma função **f** é dada por f(x) = ax + b, em que **a** e **b** são números reais. Se f(–1) = 3 e f(1) = –1, então f(3) é o número

A) 1
B) 3
C) –3
D) 5
E) –5

05. (UFRGS) O ônibus **X** parte da cidade **A** com velocidade constante de 80 km/h, à zero hora de certo dia. Às 2 horas da madrugada, o ônibus **Y** parte da mesma cidade, na direção e sentido do ônibus **X**, com velocidade constante de 100 km/h. O ônibus **Y** vai cruzar com o ônibus **X**, pela manhã, às

A) 6 horas.
B) 8 horas.
C) 10 horas.
D) 11 horas.
E) 12 horas.

06. (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.

Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia. A única afirmativa **FALSA** relativa ao gráfico é:

A) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.
B) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
C) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
D) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

07. (PUC-Campinas-SP) Durante um percurso de **x** km, um veículo faz 5 paradas de 10 minutos cada uma. Se a velocidade média desse veículo em movimento é de 60 km/h, a expressão que permite calcular o tempo, em horas, que ele leva para percorrer os **x** km é

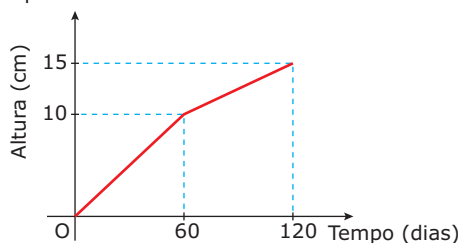
A) $\frac{6x+5}{6}$

B) $\frac{x+50}{60}$

C) $\frac{6x+5}{120}$

D) $\frac{x}{60} + 50$

E) $x + \frac{50}{6}$

08. (PUC-Campinas-SP–2008) O gráfico a seguir representa o crescimento de uma planta durante um certo período de tempo.

Esse crescimento pode ser representado pela função **f** definida por

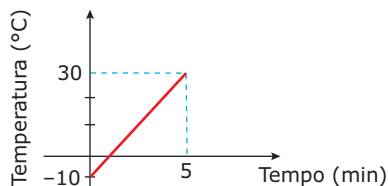
A) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{6}, \text{ se } 0 \leq t < 60 \\ \frac{t}{12} - 5, \text{ se } 60 \leq t \leq 120 \end{cases}$

B) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{6}, \text{ se } 0 \leq t \leq 60 \\ \frac{t}{12} + 5, \text{ se } 60 < t \leq 120 \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{6}, \text{ se } 0 \leq t \leq 60 \\ \frac{t}{12}, \text{ se } 60 < t \leq 120 \end{cases}$

D) $f(t) = \begin{cases} 6t, \text{ se } 0 \leq t < 60 \\ 12t, \text{ se } 60 \leq t \leq 120 \end{cases}$

E) $f(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{6}, \text{ se } 0 \leq t < 60 \\ t + \frac{51}{12}, \text{ se } 60 \leq t \leq 120 \end{cases}$

09. (Cesgranrio) Uma barra de ferro com temperatura inicial de −10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0 °C.

A) 1 min

B) 1 min e 5 s

C) 1 min e 10 s

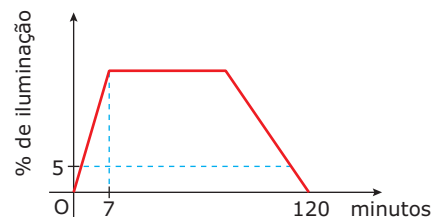
D) 1 min e 15 s

E) 1 min e 20 s

10. (UFG–2009) Para fazer traduções de textos para o inglês, um tradutor **A** cobra um valor inicial de R$ 16,00 mais R$ 0,78 por linha traduzida, e um outro tradutor, **B**, cobra um valor inicial de R$ 28,00 mais R$ 0,48 por linha traduzida. A quantidade **MÍNIMA** de linhas de um texto a ser traduzido para o inglês, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **B**, é

A) 16 B) 28 C) 41 D) 48 E) 78

11. (UFU-MG) O proprietário de um restaurante deseja estimar seus gastos no fornecimento de refeições. Para isso, ele divide o gasto total em duas partes: gasto fixo e gasto por cliente. Se seu gasto total, quando 30 clientes estão se alimentando, é de R$ 240,00 e de R$ 400,00 com 70 clientes, **DETERMINE** o gasto fixo e o gasto por cliente desse proprietário.

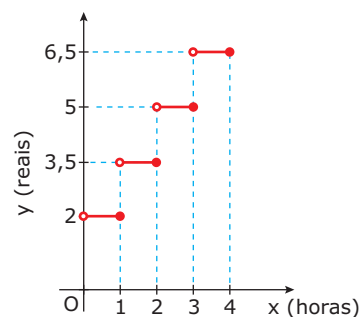
12. (UNIRIO-RJ–2008) O gráfico a seguir representa o percentual de iluminação de um teatro em relação à iluminação máxima da sala, durante um espetáculo de 2 horas de duração. Observe que esse espetáculo começa e termina sem iluminação e que, passados sete minutos do início da peça, a iluminação atinge um determinado percentual e fica constante por um período. Além disso, destaca-se que o percentual de iluminação é de 5%, um minuto após o início da peça e, também, três minutos antes do seu término. Durante quanto tempo o percentual de iluminação ficou constante nesse espetáculo?

A) 55 min

B) 1 h 09 min

C) 1 h 22 min

D) 1 h 32 min

E) 1 h 39 min

13. (PUC-Campinas-SP) A seguir, vê-se parte de um gráfico que mostra o valor **y** a ser pago (em reais) pelo uso de um estacionamento por um período de **x** horas.

Suponha que o padrão observado no gráfico não se altere quando **x** cresce. Nessas condições, uma pessoa que estacionar o seu carro das 22 horas de certo dia até as 8 horas e 30 minutos do dia seguinte deverá pagar

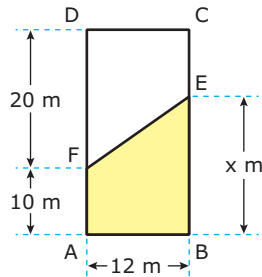
A) R$ 12,50.

B) R$ 14,00.

C) R$ 15,50.

D) R$ 17,00.

E) R$ 18,50.

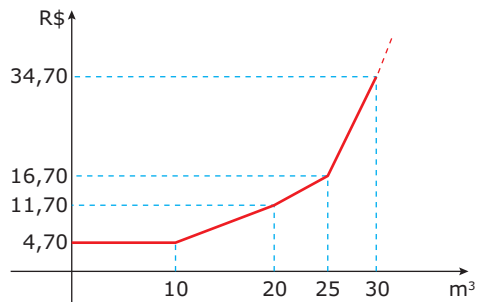
14. (UFMG) Observe a figura.

O retângulo ABCD representa um terreno, e o trapézio sombreado, uma construção a ser feita nele. Por exigências legais, essa construção deve ter uma área, no mínimo, igual a 45% e, no máximo, igual a 60% do terreno. Todos os valores **POSSÍVEIS** de **x** pertencem ao intervalo

A) [17, 26]

B) [13, 18]

C) [14, 18]

D) [18, 26]

15. (UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Água de certo município aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago em reais por uma residência, em função da quantidade de metros cúbicos consumida, é uma função cujo gráfico é a poligonal representada a seguir:

De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é **CORRETO** afirmar que, se o consumo

A) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.

B) for igual a 5 m^3, o valor pago será menor do que se o consumo for igual a 10 m^3.

C) for igual a 20 m^3, o valor pago será o dobro do que se o consumo for igual a 10 m^3.

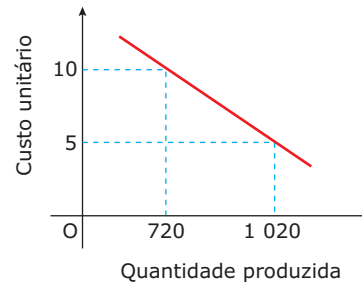
D) exceder 25 m^3, o valor pago será R$ 16,70 acrescido de R$ 3,60 por m^3 excedente.

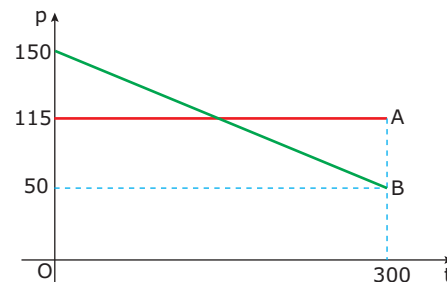
E) for igual a 22 m^3, o valor pago será R$ 15,00.

16. (Unip-SP) Admitindo que em uma determinada localidade uma empresa de táxi cobra R$ 2,00 a bandeirada e R$ 2,00 por quilômetro rodado, e outra empresa cobra R$ 3,00 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada, determine o número de quilômetros rodados num táxi da empresa que não isenta a bandeirada, sabendo que o preço da corrida apresentado é de R$ 30,00.

A) 10 km C) 6 km E) 22 km

B) 18 km D) 14 km

17. (Mackenzie-SP) O gráfico esboçado, da função $y = ax + b$, representa o custo unitário de produção de uma peça em função da quantidade mensal produzida. Para que esse custo unitário seja R$ 6,00, a produção mensal deve ser igual a

A) 930 B) 920 C) 940 D) 960 E) 980

18. (CEFET-MG–2010) Os sistemas de pagamento **A** e **B** de uma dívida de R$ 15 000,00, a ser paga em 300 meses, estão representados, de modo aproximado, pelo gráfico a seguir, em que o eixo das abscissas representa o tempo, em meses, e o das ordenadas, o valor de prestação em cada mês.

Considerando-se a área sob esse gráfico uma boa aproximação do total a ser pago, é **INCORRETO** afirmar que a(o)

A) prestação em **A** é constante.

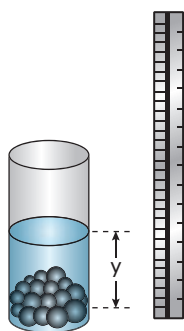
B) prestação em **B** é decrescente.

C) total a ser pago em **B** é maior que em **A**.

D) prestação em **B** torna-se menor que em **A** a partir do mês 105.

E) total a ser pago em **B** será, aproximadamente, o dobro do valor da dívida contraída.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é em função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: <www.penta.ufrgs.br>. Acesso em: 13 jan. 2009 (Adaptação).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água **y** em função do número de bolas **x**?

A) $y = 30x$
B) $y = 25x + 20,2$
C) $y = 1,27x$
D) $y = 0,7x$
E) $y = 0,07x + 6$

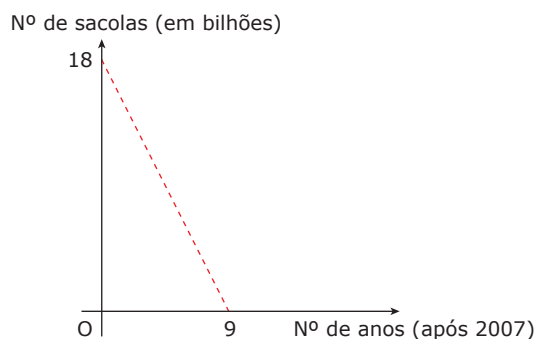
02. (Enem–2008) A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.

Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento.	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência / cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do Banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(–) Descontos (–) Outras deduções (+) Mora / Multa (+) Outros acréscimos (=) Valor cobrado

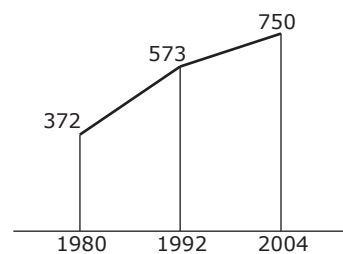
Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que **x** é o número de dias em atraso, então

A) $M(x) = 500 + 0,4x$
B) $M(x) = 500 + 10x$
C) $M(x) = 510 + 0,4x$
D) $M(x) = 510 + 40x$
E) $M(x) = 500 + 10,4x$

03. (Enem–2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.

LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. *Galileu*. nº 225, 2010.

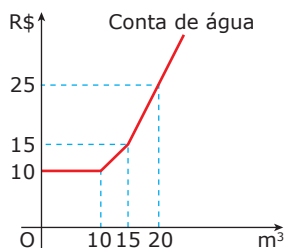
De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

A) 4,0
B) 6,5
C) 7,0
D) 8,0
E) 10,0

04. (Enem–2010) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.

ÉPOCA. Favela tem memória. nº 621, 12 abr. 2010 (Adaptação).

Se o padrão na variação do período 2004 / 2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

A) menor que 1 150.
B) 218 unidades maior que em 2004.
C) maior que 1 150 e menor que 1 200.
D) 177 unidades maior que em 2010.
E) maior que 1 200.

05. (Enem–2010) Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m^3.

Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu

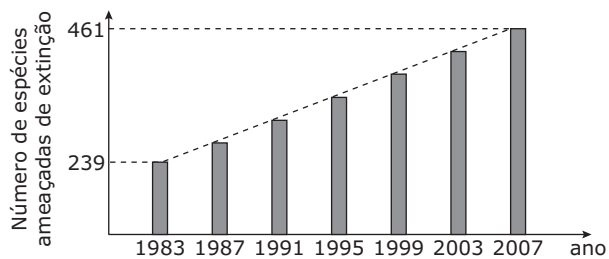
A) 16 m^3 de água.
B) 17 m^3 de água.
C) 18 m^3 de água.
D) 19 m^3 de água.
E) 20 m^3 de água.

06. (Enem–2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

Figura I Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

A) C = 4Q
B) C = 3Q + 1
C) C = 4Q – 1
D) C = Q + 3
E) C = 4Q – 2

07. (Enem–2007) O gráfico a seguir, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

A) 465
B) 493
C) 498
D) 538
E) 699

GABARITO

Fixação

01. A
02. B
03. C
04. C
05. C

Propostos

01. C
02. D
03. C
04. E
05. C
06. B
07. B
08. B
09. D
10. C
11. Gasto fixo = R$ 120,00
    Gasto por cliente = R$ 4,00
12. D
13. D
14. A
15. D
16. D
17. D
18. C

Seção Enem

01. E
02. C
03. E
04. C
05. B
06. B
07. C

MATEMÁTICA

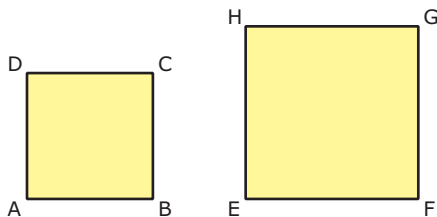
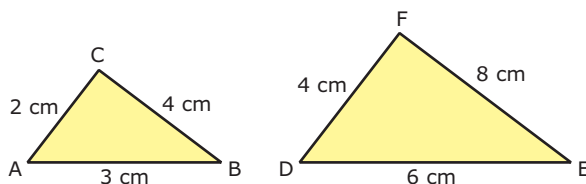
Semelhança de triângulos

MÓDULO 03 FRENTE D

SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

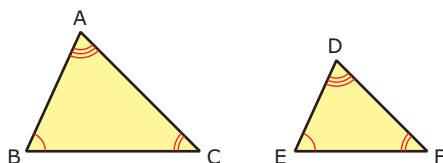
A ideia de semelhança de figuras planas é uma das mais importantes da Geometria. Dizemos que duas figuras planas são semelhantes quando possuem a mesma forma.

Exemplos

1º) Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes.

2º) Dois triângulos são semelhantes quando seus lados têm medidas proporcionais.

Definição:

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se,

i) os ângulos são congruentes.

ii) os lados opostos a ângulos congruentes são proporcionais.

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

OBSERVAÇÕES

i) Indicamos a semelhança pelo símbolo (**~**).

ii) Lados opostos a ângulos congruentes são chamados de lados homólogos.

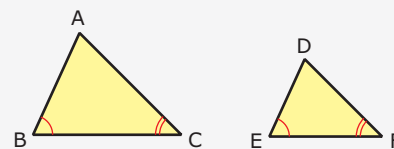
iii) A razão entre dois lados homólogos (**k**) é a razão de semelhança.

CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Vimos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os três lados proporcionais. Porém, para verificarmos se dois triângulos são semelhantes, não é necessário conferir todas essas condições.

A seguir, enunciamos os casos de semelhança, que são alguns grupos de condições capazes de garantir a semelhança dos triângulos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

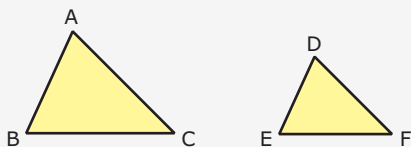
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.

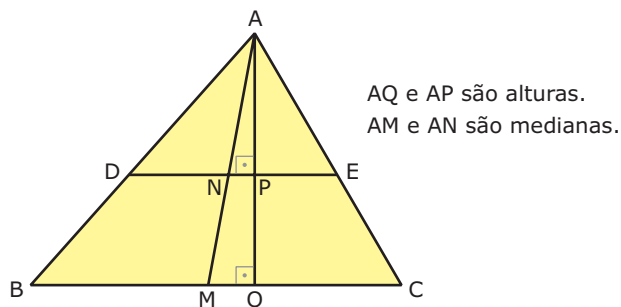
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}\\ \hat{B}\equiv\hat{E}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \Delta\,ABC \sim \Delta\,DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados respectivamente proporcionais.

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}\Leftrightarrow \Delta\,ABC \sim \Delta\,DEF$$

Razão de semelhança

A razão de semelhança de dois triângulos é a razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes (lados, alturas, medianas, etc.).

Considere os triângulos semelhantes ABC e ADE.

AQ e AP são alturas.
AM e AN são medianas.

A razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo ADE é o número **k**, tal que:

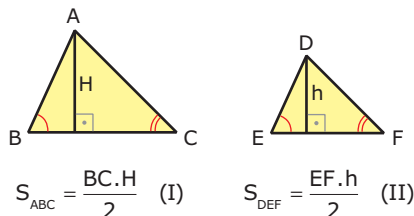
$$k=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{AQ}{AP}=\frac{AM}{AN}$$

Razão entre áreas

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é dada pelo quadrado da razão de semelhança entre eles.

Demonstração:

Consideremos que $\Delta\,ABC \sim \Delta\,DEF$.

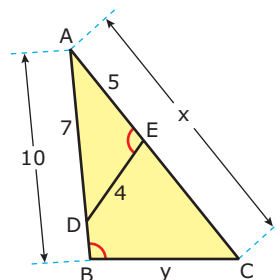
$$S_{ABC}=\frac{BC.H}{2}\quad(I)\qquad S_{DEF}=\frac{EF.h}{2}\quad(II)$$

Mas, $\frac{BC}{EF}=\frac{H}{h}=k.$ (III)

Portanto, de (I), (II) e (III), temos que:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{\frac{BC.H}{2}}{\frac{EF.h}{2}}=\frac{BC}{EF}.\frac{H}{h}=k.k \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=k^2$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Na figura, sabe-se que $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, AD = 7 cm, AE = 5 cm, ED = 4 cm e AB = 10 cm.

A) Determinar AC = x e BC = y.

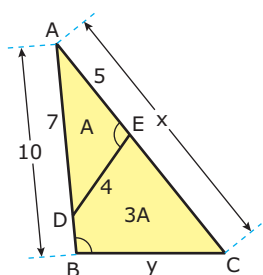
B) Determinar a razão entre as áreas dos triângulos ADE e do quadrilátero BCED.

Resolução:

A) Os triângulos ADE e ABC são semelhantes, pois os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, e o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos (caso AA). Então:

$\frac{x}{7}=\frac{10}{5}=\frac{y}{4}\Leftrightarrow x = 14$ cm e $y = 8$ cm

B) Seja **A** a área do triângulo ADE. A razão entre as áreas de ADE e de ABC é $K^2=\frac{1}{4}$. Assim, $\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}}=K^2=\frac{1}{4}$.

Então, $A_{ABC}=4A_{ADE}=4A$ e $A_{BCED}=3A$, como mostrado na figura a seguir:

Portanto, $\frac{A_{ADE}}{A_{BCED}} = \frac{A}{3A} = \frac{1}{3}$.

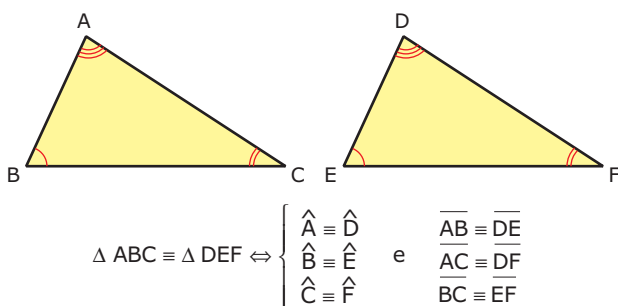
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

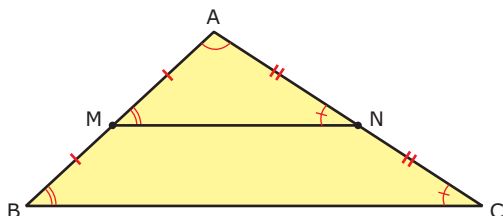
Definição:

Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k = 1, os triângulos são chamados congruentes e possuem

i) os ângulos congruentes.

ii) os lados homólogos congruentes.

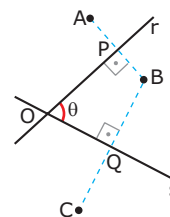
$$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \begin{matrix} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \end{matrix}$$

BASE MÉDIA DE TRIÂNGULO

Sejam o triângulo ABC e os pontos médios **M** e **N** dos lados AB e AC, respectivamente.

Os triângulos AMN e ABC são semelhantes pelo caso LAL, e a razão de semelhança é $k = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Logo, $MN = \frac{1}{2}BC$, $\hat{B} \equiv \hat{M}$, $\hat{C} \equiv \hat{N}$ e, consequentemente, MN // BC. O segmento MN é chamado base média do triângulo ABC e, esquematicamente, temos:

MN é base média do triângulo ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2}BC \\ MN \,//\, BC \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

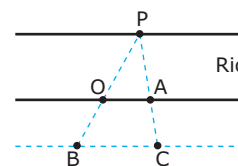
01. (UFMG) Observe esta figura.

Nessa figura, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, respectivamente, às retas **r** e **s**. Além disso, AP = PB, BQ = QC e a medida do ângulo $P\hat{O}Q$ é **θ**. Considerando-se essas informações, é **CORRETO** afirmar que a medida do ângulo interno $A\hat{O}C$ do quadrilátero AOCB é

A) 2θ

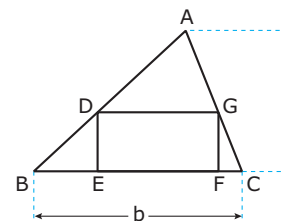
B) $\frac{5}{2}\theta$

C) 3θ

D) $\frac{3}{2}\theta$

02. (UNESP) Um observador situado em um ponto **O**, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto **P**, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso, marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que **P**, **O** e **B** estão alinhados entre si, e **P**, **A** e **C**, também. Além disso, $\overline{OA}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $\overline{OA}$ = 25 m, $\overline{BC}$ = 40 m e $\overline{OB}$ = 30 m, conforme figura.

A distância, em metros, do observador em **O** até o ponto **P** é

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

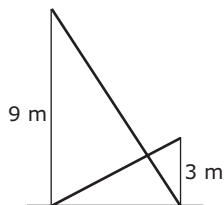
03. (FUVEST-SP) O triângulo ABC tem altura **h** e base **b** (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de **h** e **b**, é dada pela fórmula

A) $\frac{bh}{h+b}$

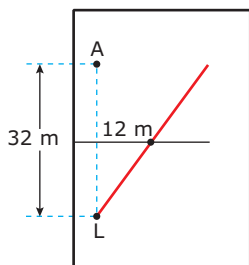
B) $\frac{2bh}{h+b}$

C) $\frac{bh}{h+2b}$

D) $\frac{bh}{2h+b}$

E) $\frac{bh}{2(h+b)}$

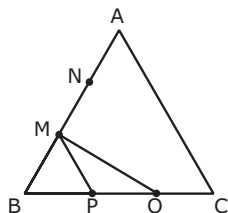
04. (UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura a seguir. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.

A) 1,50 m
B) 1,75 m
C) 2,00 m
D) 2,25 m
E) 2,50 m

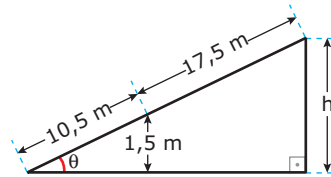
05. (FUVEST-SP) Um lateral **L** faz um lançamento para um atacante **A**, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral, e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância **MÍNIMA** que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de

A) 18,8 m.
B) 19,2 m.
C) 19,6 m.
D) 20,0 m.
E) 20,4 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

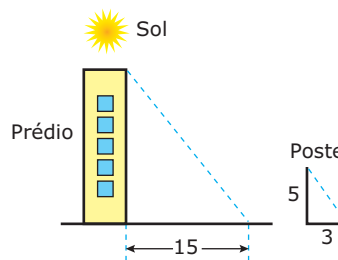
01. (UFV-MG) Depois de andar 5 m em uma escada rolante, uma pessoa percebeu que se deslocou 4 m em relação à horizontal. Tendo andado 10 m na mesma escada, quantos metros terá se deslocado em relação à vertical?

A) 5 B) 8 C) 9 D) 6 E) 7

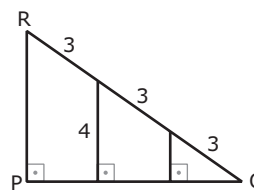
02. (VUNESP) O triângulo ABC da figura é equilátero. Os pontos **M** e **N** e os pontos **P** e **Q** dividem os lados a que pertencem em três segmentos de reta de mesma medida. Nessas condições, **CALCULE**

A) a medida do ângulo $M\hat{P}Q$ (vértice **P**).
B) a medida do ângulo $B\hat{M}Q$ (vértice **M**).

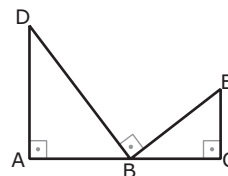
03. (UFOP-MG–2008) Uma pessoa, após caminhar 10,5 metros sobre uma rampa plana com inclinação de **θ** radianos, em relação a um piso horizontal, e altura de **h** metros na sua parte mais alta, está a 1,5 metro de altura em relação ao piso e a 17,5 metros do ponto mais alto da rampa.

Assim, a altura **h** da rampa, em metros, é de

A) 2,5 B) 4,0 C) 7,0 D) 8,5

04. (UNESP) A sombra de um prédio, em um terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.

A altura do prédio, em metros, é

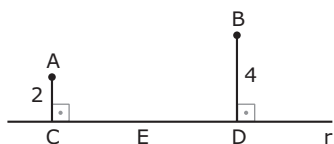
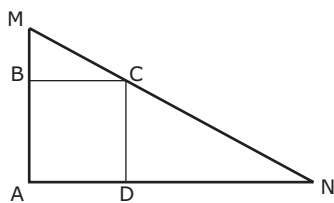
A) 25 B) 29 C) 30 D) 45 E) 75

05. (UFRN) Considerando-se as informações constantes no triângulo PQR (figura a seguir), pode-se concluir que a altura $\overline{PR}$ desse triângulo mede

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

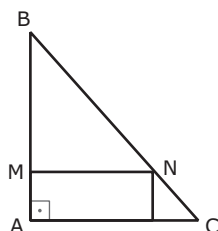
06. (UNESP) Na figura, **B** é um ponto do segmento de reta $\overline{AC}$, e os ângulos $D\hat{A}B$, $D\hat{B}E$ e $B\hat{C}E$ são retos.

Se o segmento AD = 6 dm, o segmento AC = 11 dm e o segmento EC = 3 dm, as medidas **POSSÍVEIS** de $\overline{AB}$, em dm, são

A) 4,5 e 6,5
B) 7,5 e 3,5
C) 8 e 3
D) 7 e 4
E) 9 e 2

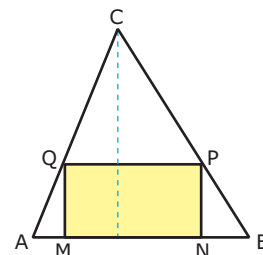
07. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, as distâncias dos pontos **A** e **B** à reta **r** valem 2 e 4. As projeções ortogonais de **A** e **B** sobre essa reta são os pontos **C** e **D**. Se a medida de $\overline{CD}$ é 9, a que distância de **C** deverá estar o ponto **E**, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?

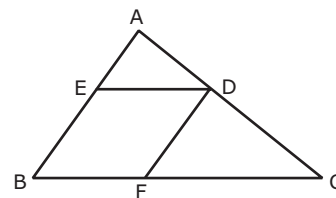
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

08. (UFMG) Na figura a seguir, o quadrado ABCD está inscrito no triângulo AMN, cujos lados $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ medem, respectivamente, **m** e **n**.

Então, o lado do quadrado mede

A) $\dfrac{mn}{m+n}$
B) $\sqrt{\dfrac{m^2+n^2}{8}}$
C) $\dfrac{m+n}{4}$
D) $\sqrt{\dfrac{mn}{2}}$

09. (Fatec-SP) Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo e isósceles, e o retângulo nele inscrito tem lados que medem 4 cm e 2 cm.

O perímetro do triângulo MBN é

A) 8 cm.
B) 12 cm.
C) $(8 + \sqrt{2})$ cm.
D) $(8 + 2\sqrt{2})$ cm.
E) $4(2 + \sqrt{2})$ cm.

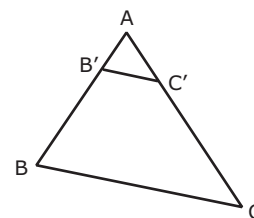
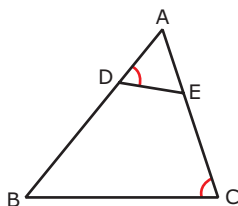
10. (FUVEST-SP) No triângulo acutângulo ABC, a base $\overline{AB}$ mede 4 cm, e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo, cujos vértices **M** e **N** pertencem ao lado $\overline{AB}$, **P** pertence ao lado $\overline{BC}$ e **Q**, ao lado $\overline{AC}$. O perímetro desse retângulo, em cm, é

A) 4
B) 8
C) 12
D) 14
E) 16

11. (UFMG) Observe a figura.

Nela, AB = 8, BC = 12 e BFDE é um losango inscrito no triângulo ABC. A medida do lado do losango é

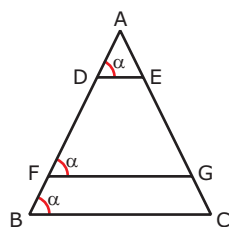
A) 4
B) 4,8
C) 5
D) 5,2

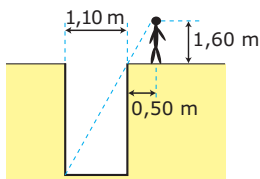
12. (UFC) Na figura a seguir, os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes. Se AC = 4AC', então o perímetro de AB'C', dividido pelo perímetro de ABC, é igual a

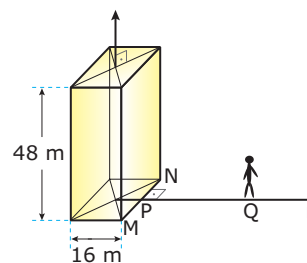
A) $\dfrac{1}{8}$
B) $\dfrac{1}{6}$
C) $\dfrac{1}{4}$
D) $\dfrac{1}{2}$
E) 1

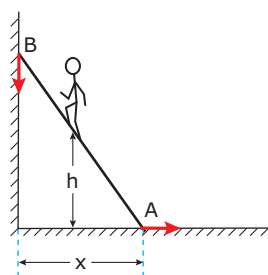
MATEMÁTICA

13. (PUC-SP) Os triângulos ABC e AED, representados na figura a seguir, são semelhantes, sendo o ângulo $A\hat{D}E$ congruente ao ângulo $A\hat{C}B$.

Se BC = 16 cm, AC = 20 cm, AD = 10 cm e AE = 10,4 cm, o perímetro do quadrilátero BCED, em centímetros, é

A) 32,6
B) 36,4
C) 40,8
D) 42,6
E) 44,4

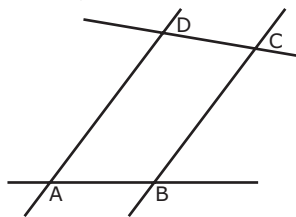
14. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, se AB = 5AD = 5FB, a razão $\frac{FG}{DE}$ vale

A) 3
B) 4
C) 5
D) $\frac{5}{2}$
E) $\frac{7}{2}$

15. (UFRGS) Para estimar a profundidade de um poço com 1,10 m de largura, uma pessoa cujos olhos estão a 1,60 m do chão posiciona-se a 0,50 m de sua borda. Dessa forma, a borda do poço esconde exatamente seu fundo, como mostra a figura. Com os dados anteriores, a pessoa conclui que a profundidade do poço é

A) 2,82 m.
B) 3,00 m.
C) 3,30 m.
D) 3,52 m.

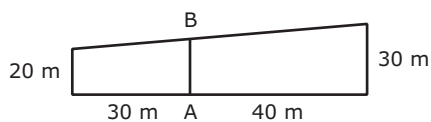
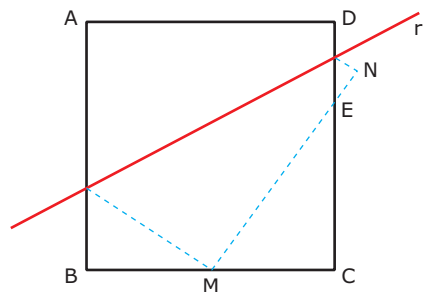
16. (UFF-RJ) Um prédio com a forma de um paralelepípedo retângulo tem 48 m de altura. No centro da cobertura desse prédio e perpendicularmente a essa cobertura, está instalado um para-raios. No ponto **Q** sobre a reta **r** – que passa pelo centro da base do prédio e é perpendicular ao segmento $\overline{MN}$ –, está um observador que avista somente uma parte do para-raios (ver a figura). A distância do chão aos olhos do observador é 1,8 m, e o segmento PQ = 61,6 m. O comprimento da parte do para-raios que o observador **NÃO** consegue avistar é

A) 16 m.
B) 12 m.
C) 8 m.
D) 6 m.
E) 3 m.

17. (UNESP) Um homem sobe em uma escada de 5 metros de comprimento, encostada em um muro vertical. Quando ele está em um degrau que dista 3 metros do pé da escada, esta escorrega, de modo que a extremidade **A** se desloca para a direita, conforme a seta da figura a seguir, e a extremidade **B** desliza para baixo, mantendo-se aderente ao muro.

ENCONTRE a fórmula que expressa a distância **h**, do degrau em que está o homem até o chão em função da distância **x**, do pé da escada ao muro.

18. (UNESP) Um obelisco de 12 m de altura projeta, num certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. **CALCULE** a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra.

19. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, AD = 8, AB = 3 e BC = 7. Sendo **P** o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$, a medida do segmento $\overline{BP}$ é

A) 23 B) 22 C) 24 D) 21

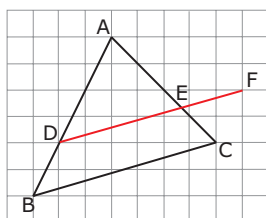
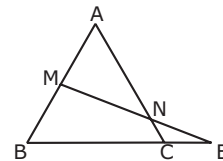
20. (UFPE) Qual o número inteiro mais próximo do comprimento do segmento $\overline{AB}$ indicado na figura a seguir?

21. (UFMG–2009) Uma folha de papel quadrada, ABCD, que mede 12 cm de lado, é dobrada na reta **r**, como mostrado na figura a seguir:

Feita essa dobra, o ponto **D** sobrepõe-se ao ponto **N**, e o ponto **A**, ao ponto médio **M**, do lado BC. É **CORRETO** afirmar que, nessas condições, o segmento CE mede

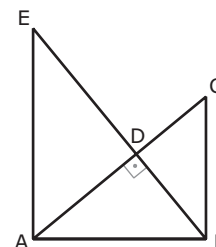
A) 7,2 cm.

B) 7,5 cm.

C) 8,0 cm.

D) 9,0 cm.

22. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, o lado de cada quadrado da malha quadriculada mede 1 unidade de comprimento. **CALCULE** a razão $\frac{DE}{BC}$.

23. (AFA-SP) Na figura a seguir, o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ = 16 cm. Então, a medida do segmento $\overline{CN}$, em cm, é um sétimo de

A) 48 B) 49 C) 50 D) 51

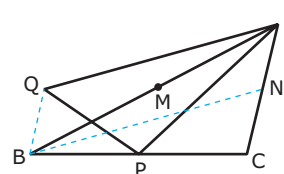
24. (UFMG) Nesta figura, os ângulos $A\hat{B}C$, $C\hat{D}E$ e $E\hat{A}B$ são retos, e os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, **x**, **y** e **z**.

Nessa situação, a altura do triângulo ADE, em relação ao lado $\overline{AE}$, é dada por

A) $\frac{x\sqrt{z^2 - y^2}}{y}$

B) $\frac{x\sqrt{z^2 - y^2}}{z}$

C) $\frac{y\sqrt{z^2 - y^2}}{z}$

D) $\frac{z\sqrt{z^2 - y^2}}{y}$

25. (UFU-MG–2007) Na figura a seguir, ABC é um triângulo e suas medianas AP, BN e CM medem, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 4 cm. Se BQ é paralelo ao lado AC com 2.BQ = AC, então o perímetro do triângulo APQ é igual a

A) 24 cm. B) 22 cm. C) 20 cm. D) 18 cm.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–1998) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir

A) 30 cm.

B) 45 cm.

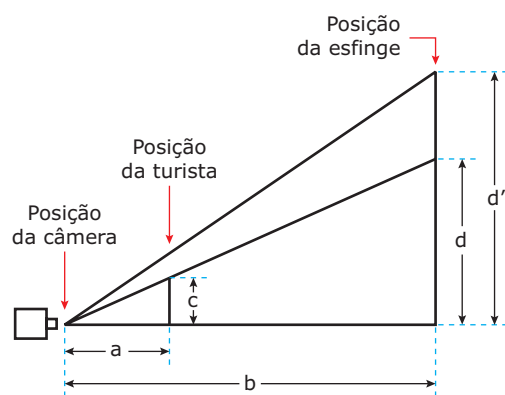
C) 50 cm.

D) 80 cm.

E) 90 cm.

MATEMÁTICA

02. (Enem–2009) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.

Fotografia obtida da Internet.

Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por **d** e **d'**, respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por **b**, e que a distância da turista à mesma lente, por **a**. A razão entre **b** e **a** será dada por

A) $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$

B) $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$

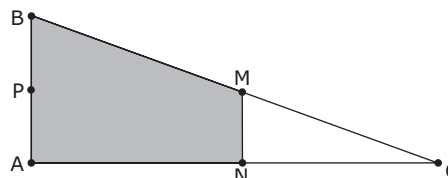
C) $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$

D) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$

E) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$

03. (Enem–2009) A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, uma altura de 2,2 metros. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

A) 1,16 metro.
B) 3,0 metros.
C) 5,4 metros.
D) 5,6 metros.
E) 7,04 metros.

04. (Enem–2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

A região demarcada pelas estacas **A**, **B**, **M** e **N** deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

A) à mesma área do triângulo AMC.
B) à mesma área do triângulo BNC.
C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D) ao dobro da área do triângulo MNC.
E) ao triplo da área do triângulo MNC.

GABARITO

Fixação

01. A 02. E 03. D 04. D 05. B

Propostos

01. D
02. A) 120° B) 90°
03. B
04. A
05. B
06. E
07. A
08. A
09. E
10. B
11. B
12. C
13. E
14. B
15. D
16. D
17. $h = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$, com $0 < x < 5$
18. 4,08 m
19. D
20. 24
21. C
22. $\frac{2}{3}$
23. A
24. B
25. B

Seção Enem

01. B 02. D 03. D 04. E

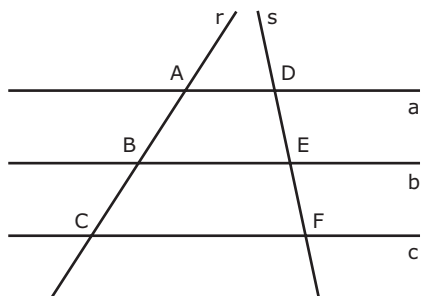
MATEMÁTICA

Teorema de Tales e quadriláteros

MÓDULO 04

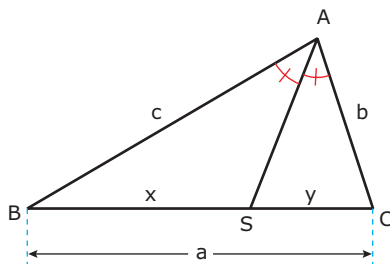
FRENTE D

TEOREMA DE TALES

Considere três retas paralelas **a**, **b**, **c** "cortadas" por duas transversais **r** e **s**.

Pelo Teorema de Tales, temos que a razão entre segmentos correspondentes nas duas transversais é constante, isto é:

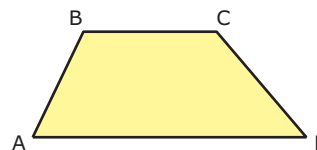
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

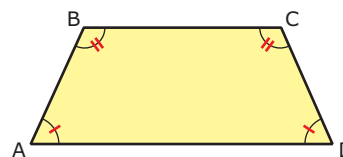
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

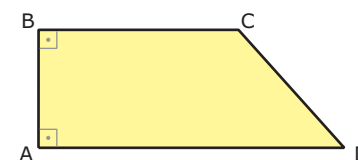
Trapézios

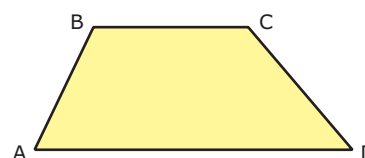
Os trapézios são os quadriláteros que possuem dois lados paralelos, chamados bases.

$\overline{AD} // \overline{BC}$

O quadrilátero ABCD é um trapézio de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Classificação

Trapézio isósceles: Os lados não paralelos são congruentes ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$), e os ângulos das bases são congruentes ($\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$).

$\overline{AD} // \overline{BC}$

Trapézio retângulo: Um de seus lados é perpendicular às bases ($\hat{A} = \hat{B} = 90º$).

$\overline{AD} // \overline{BC}$

Trapézio escaleno: Os lados não paralelos não são congruentes, e nenhum ângulo interno é reto.

$\overline{AD} // \overline{BC}$

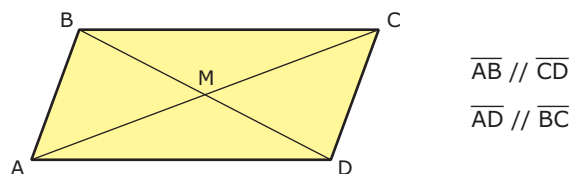
$AB \neq CD$

$\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C} \neq \hat{D}$

Paralelogramos

Os paralelogramos são os quadriláteros que possuem os lados opostos paralelos.

$\overline{AB} // \overline{CD}$

$\overline{AD} // \overline{BC}$

Propriedades

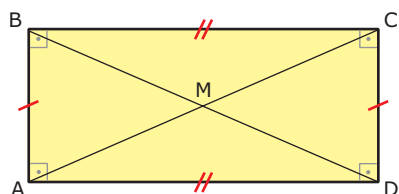
i) Os lados opostos são paralelos e congruentes.

ii) Os ângulos opostos são congruentes.

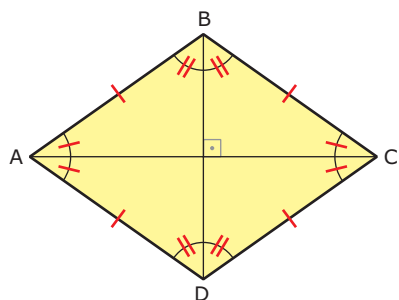
iii) Os ângulos consecutivos (como $\hat{A}$ e $\hat{D}$) são suplementares, ou seja, somam 180°.

iv) As diagonais se cortam ao meio, ou seja, **M** é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

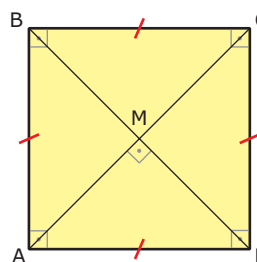
Retângulos

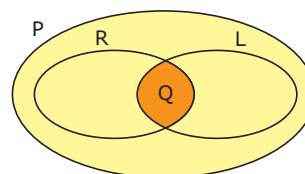
Os retângulos são os paralelogramos que possuem todos os ângulos retos.

Além das propriedades válidas para os paralelogramos, temos que os retângulos possuem as diagonais congruentes.

Losangos

Os losangos são os paralelogramos que possuem todos os lados congruentes.

Além das propriedades de paralelogramo, suas diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos do paralelogramo.

Quadrados

Os quadrados são os paralelogramos que possuem todos os lados e ângulos congruentes.

Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e um losango; portanto, para ele, são válidas todas as propriedades vistas para esses quadriláteros.

Podemos representar os conjuntos dos quadriláteros notáveis pelo seguinte esquema.

P: Conjunto dos paralelogramos

R: Conjunto dos retângulos

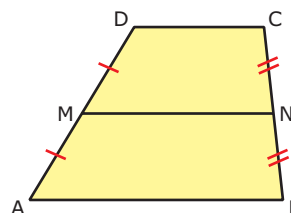
L: Conjunto dos losangos

Q: Conjunto dos quadrados

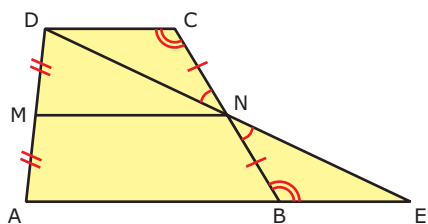
BASE MÉDIA DE TRAPÉZIO

Seja $\overline{MN}$ um segmento com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio ABCD. Então:

i) $\overline{MN}$ é paralelo às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

ii) $\overline{MN}$ é igual à semissoma das bases.

MN é base média do trapézio ABCD $\Leftrightarrow \begin{cases} MN = \dfrac{AB + DC}{2} \text{ e} \\ MN // AB // CD \end{cases}$

Demonstração:

Prolongamos DN até encontrar o prolongamento de AB.

Na figura, os triângulos DCN e NBE são congruentes, pois possuem os ângulos congruentes e CN ≡ NB (caso ALA).

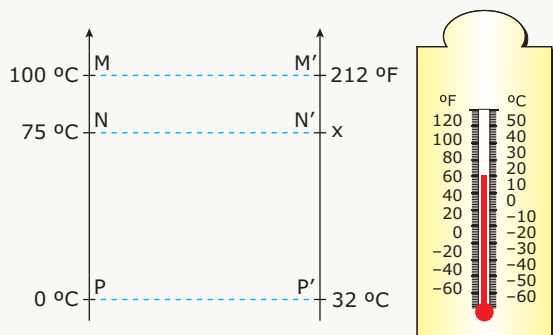
Então, BE ≡ CD e NE ≡ DN.

Como MN é base média do triângulo ADE, então:

$$MN \,//\, AB \,//\, CD \text{ e } MN = \frac{AE}{2} = \frac{AB + BE}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$

LEITURA COMPLEMENTAR

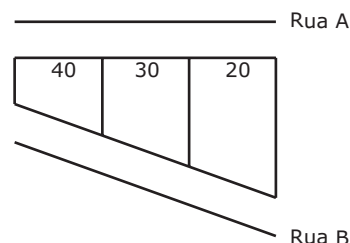
Escalas termométricas

A escala Celsius adota, sob pressão normal, o valor 0 (zero) para a temperatura de fusão do gelo e o valor 100 (cem) para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 (trinta e dois) e 212 (duzentos e doze) a essas temperaturas de fusão e ebulição, respectivamente. Os símbolos °C e °F indicam graus Celsius e graus Fahrenheit, respectivamente. Aplicando o Teorema de Tales, podemos transformar medidas de uma dessas escalas para a outra; por exemplo, para transformar 75 °C em graus Fahrenheit, agimos da seguinte maneira.

Termômetro graduado nas escalas Fahrenheit e Celsius

$$\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} \Rightarrow \frac{100 - 0}{75 - 0} = \frac{212 - 32}{x - 32} \Rightarrow x = 167$$

Logo, 75 ºC equivalem a 167 ºF.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. Três terrenos têm frentes para a rua **A** e para a rua **B**, conforme a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual a medida de frente para a rua **B** de cada lote, sabendo-se que a frente total para essa rua é 120 m?

02. (UFMG) Sobre figuras planas, é **CORRETO** afirmar que

A) um quadrilátero convexo é um retângulo, se os lados opostos têm comprimentos iguais.

B) um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.

C) um trapézio que tem dois ângulos consecutivos congruentes é isósceles.

D) um triângulo equilátero é também isósceles.

E) um triângulo retângulo é aquele cujos ângulos são retos.

03. (UFU-MG) Em um quadrilátero ABCD, o ângulo $\hat{C}$ é igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo $\hat{B}$, o ângulo $\hat{A}$ mede o quíntuplo do ângulo $\hat{C}$ e o ângulo $\hat{D}$ vale 45°. Pode-se dizer que $\hat{A} - \hat{B}$ vale

A) 50°

B) 60°

C) 70°

D) 80°

E) 90°

04. (PUC Minas) Um trapézio isósceles, de 12 cm de altura, tem bases medindo 4 cm e 6 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obteremos um quadrilátero cujo perímetro mede

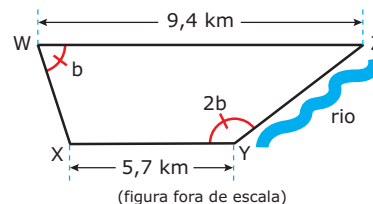
A) 20 cm.

B) 24 cm.

C) 26 cm.

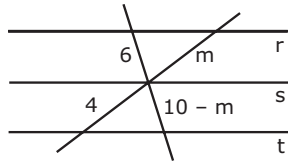
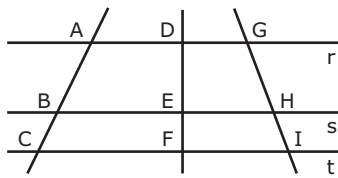
D) 30 cm.

05. (UNESP–2008) Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio, como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.

(figura fora de escala)

Se o ângulo $X\hat{Y}Z$ é o dobro do ângulo $X\hat{W}Z$, a medida, em km, do lado YZ, que fica à margem do rio, é

A) 7,5 B) 5,7 C) 4,7 D) 4,3 E) 3,7

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. **CALCULE m** na figura, r // s // t.

02. (PUC-Campinas-SP–2007) Na figura a seguir, as retas **r**, **s** e **t** são paralelas entre si.

Se AC = x, BC = 8, DE = 15, EF = x – 10, GI = y e HI = 10, então x + y é um número

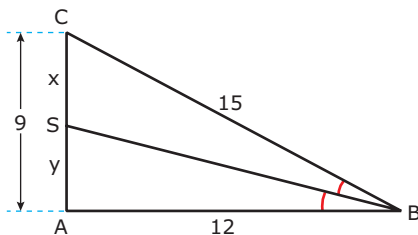
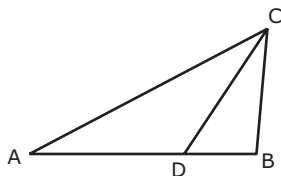
A) maior que 47.

B) entre 41 e 46.

C) menor que 43.

D) quadrado perfeito.

E) cubo perfeito.

03. Na figura, **CALCULE** os valores de **x** e **y**, respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.

04. (Cesgranrio) No triângulo ABC da figura, $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo interno em $\hat{C}$. Se AD = 3 cm, DB = 2 cm e AC = 4 cm, então $\overline{BC}$ mede

A) 3 cm.

B) $\frac{5}{2}$ cm.

C) $\frac{7}{2}$ cm.

D) $\frac{8}{3}$ cm.

E) 4 cm.

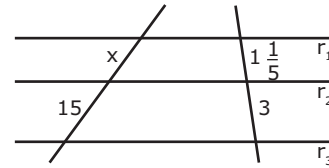
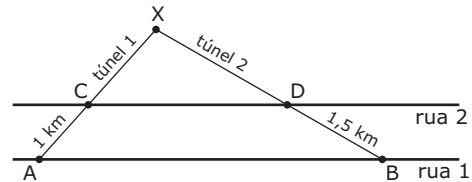
05. (Cesgranrio) As retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas, e os comprimentos dos segmentos de transversais são os indicados na figura. Então, **x** é igual a

A) $4\frac{1}{5}$

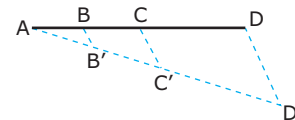
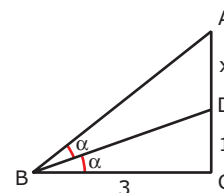
B) $5\frac{1}{5}$

C) 5

D) $\frac{8}{5}$

E) 6

06. (UFV-MG–2007) Sob duas retas paralelas de uma cidade, serão construídos, a partir das estações **A** e **B**, passando pelas estações **C** e **D**, dois túneis retilíneos, que se encontrarão na estação **X**, conforme ilustra a figura a seguir:

A distância entre as estações **A** e **C** é de 1 km e entre as estações **B** e **D**, de 1,5 km. Em cada um dos túneis, são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em **X**, no mesmo dia, é **CORRETO** afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é

A) 135 B) 145 C) 125 D) 105 E) 115

07. (Unicamp-SP) A figura a seguir mostra um segmento $\overline{AD}$ dividido em três partes: AB = 2 cm, BC = 3 cm e CD = 5 cm. O segmento $\overline{AD'}$ mede 13 cm, e as retas $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são paralelas a $\overline{DD'}$. **DETERMINE** os comprimentos dos segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'D'}$.

08. (FGV-SP–2008) Na figura, $A\hat{C}B$ é reto, $A\hat{B}D = D\hat{B}C = \alpha$, AD = x, DC = 1 e BC = 3. Com as informações dadas, **DETERMINE** o valor de **x**.

09. Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC determina sobre o lado $\overline{AB}$ segmentos de 3 cm e de 12 cm. **CALCULE** as medidas dos segmentos que essa reta determina sobre o lado $\overline{AC}$, cuja medida é 10 cm.

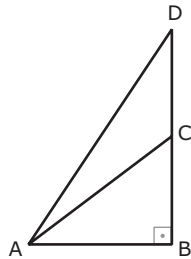
10. (VUNESP) Na figura, o triângulo ABD é reto em **B**, e $\overline{AC}$ é a bissetriz de $B\hat{A}D$. Se AB = 2.BC, fazendo BC = b e CD = d, então

A) d = b

B) $d = \frac{5}{2}b$

C) $d = \frac{5}{3}b$

D) $d = \frac{6}{5}b$

E) $d = \frac{5}{4}b$

11. A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos que medem 9 cm e 16 cm. Sabendo que $\overline{AB}$ mede 18 cm, **DETERMINE** a medida de $\overline{AC}$.

12. (PUC-Campinas-SP) Considere as afirmações:

I – Todo retângulo é um paralelogramo.

II – Todo quadrado é um retângulo.

III – Todo losango é um quadrado.

Associe a cada uma delas a letra **V**, se for **VERDADEIRA**, ou **F**, caso seja **FALSA**. Na ordem apresentada, temos

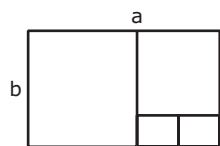
A) F F F.

B) F F V.

C) V F F.

D) V V F.

E) N.d.a.

13. (UFMG) O retângulo a seguir, de dimensões **a** e **b**, está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão $\frac{a}{b}$?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

14. (UFV-MG) Em um trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isso significa que

A) os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.

B) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.

C) as diagonais se interceptam formando ângulo reto.

D) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.

E) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio.

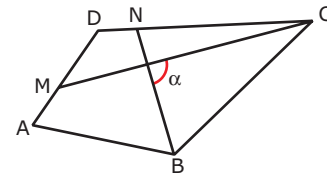
15. (Cesgranrio) No quadrilátero ABCD da figura, são traçadas as bissetrizes $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$, que formam entre si o ângulo **α**. A soma dos ângulos internos **A** e **D** desse quadrilátero corresponde a

A) $\frac{\alpha}{4}$

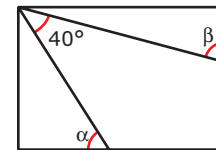
B) $\frac{\alpha}{2}$

C) α

D) 2α

E) 3α

16. (FUVEST-SP) No retângulo a seguir, o valor, em graus, de α + β é

A) 50

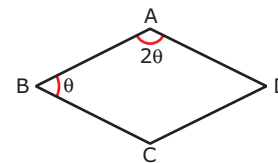
B) 90

C) 120

D) 130

E) 220

17. (FUVEST-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

18. (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir, tem-se representado o losango ABCD, cuja diagonal menor mede 4 cm.

A medida do lado desse losango, em centímetros, é

A) $6\sqrt{3}$

B) 6

C) $4\sqrt{3}$

D) 4

E) $2\sqrt{3}$

19. (UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1:3. O ângulo **MENOR** desse paralelogramo mede

A) 45° B) 50° C) 55° D) 60° E) 65°

20. (FGV-SP–2006) Uma folha de papel retangular dobrada ao meio no comprimento e na largura fica com 42 cm de perímetro. No entanto, se dobrada em três partes iguais no comprimento e em duas partes iguais na largura, fica com 34 cm de perímetro. O módulo da diferença das dimensões dessa folha é

A) 12 cm.

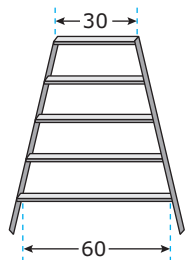
B) 10 cm.

C) 9 cm.

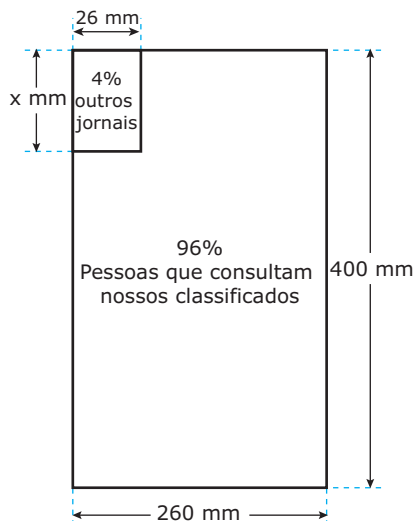
D) 8 cm.

E) 6 cm.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2000) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras, respectivamente, iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.

Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser

A) 144 B) 180 C) 210 D) 225 E) 240

02. (Enem–2010) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.

Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

A) 1 mm.
B) 10 mm.
C) 17 mm.
D) 160 mm.
E) 167 mm.

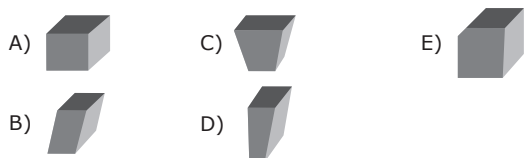
03. (Enem–2010) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

A)

B)

C)

D)

E)

04. (Enem–2010) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm). O valor da segunda encomenda será

A) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

B) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

C) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

D) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

E) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

GABARITO

Fixação

01. $\frac{160}{3}$ m, 40 m e $\frac{80}{3}$ m
02. D
03. C
04. C
05. E

Propostos

01. m = 4 ou m = 6
02. B
03. x = 5 e y = 4
04. D
05. E
06. C
07. AB' = 2,6 cm
    B'C' = 3,9 cm
    C'D' = 6,5 cm
08. $\frac{5}{4}$
09. 2 cm e 8 cm
10. C
11. x = 32 cm ou x = $\frac{81}{8}$ cm
12. D
13. A
14. B
15. D
16. D
17. D
18. D
19. A
20. E

Seção Enem

01. D 02. D 03. C 04. B

MATEMÁTICA

Funções soma e fatoração

MÓDULO 05 FRENTE E

SEN (A ± B) E COS (A ± B)

Observe-se que:

sen (30° + 60°) ≠ sen 30° + sen 60°, pois $1 \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, sen (a + b) ≠ sen a + sen b.

Fórmulas

Quaisquer que sejam os valores de **a** e **b**, valem as seguintes identidades:

I	sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a
II	sen (a – b) = sen a.cos b – sen b.cos a
III	cos (a + b) = cos a.cos b – sen a.sen b
IV	cos (a – b) = cos a.cos b + sen a.sen b

Exemplo

Calcular sen 75°.

Resolução:

Como 75° = 45° + 30°, tem-se:

sen 75° = sen (45° + 30°) ⇒

sen 75° = sen 45°.cos 30° + sen 30°.cos 45° ⇒

$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

SEN 2X E COS 2X

Para todo **x**, tem-se:

$$\text{sen } 2x = 2.\text{sen } x.\cos x$$

De fato:

sen 2x = sen (x + x) = sen x.cos x + sen x.cos x
= 2.sen x.cos x

Exemplos

1º) sen 4x = 2.sen 2x.cos 2x

2º) sen 20° = 2.sen 10°.cos 10°

3º) $\text{sen } \frac{\pi}{4} = 2.\text{sen } \frac{\pi}{8}.\cos \frac{\pi}{8}$

4º) $\text{sen } x = 2.\text{sen } \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2}$

Da mesma forma, para todo **x**, tem-se:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

De fato:

cos 2x = cos (x + x) = cos x.cos x – sen x.sen x
= $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Exemplos

1º) $\cos 4x = \cos^2 2x - \text{sen}^2 2x$

2º) $\cos 20° = \cos^2 10° - \text{sen}^2 10°$

3º) $\cos \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \text{sen}^2 \frac{\pi}{8}$

4º) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

Observamos que, ao utilizarmos a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, podemos obter duas outras fórmulas para cos 2x, que são:

$$\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2.\text{sen}^2 x$$

TG (A ± B)

Observe-se que tg (30º + 120º) ≠ tg 30º + tg 120º, pois:

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$

Assim, tg (a + b) ≠ tg a + tg b.

Fórmulas

i) Sendo a, b e a + b $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a.\text{tg } b}$$

Demonstração:

$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos (a+b)} = \frac{\text{sen } a.\cos b + \text{sen } b.\cos a}{\cos a.\cos b - \text{sen } a.\text{sen } b}$

Dividindo-se o numerador e o denominador por cos a.cos b, tem-se:

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\frac{\text{sen } a.\cos b}{\cos a.\cos b} + \frac{\text{sen } b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\frac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b} - \frac{\text{sen } a.\text{sen } b}{\cos a.\cos b}} \Rightarrow$$

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a.\text{tg } b}$$

ii) Sendo a, b e a − b $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\text{tg }(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a.\text{tg } b}$$

A demonstração é análoga à anterior.

TG 2X

Sendo x e 2x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\text{tg } 2x = \frac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

Demonstração:

$$\text{tg } 2x = \text{tg }(x + x) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x.\text{tg } x} = \frac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

Exemplos

1º) $\text{tg } 4x = \frac{2.\text{tg } 2x}{1 - \text{tg}^2 2x}$

2º) $\text{tg } 20^\circ = \frac{2.\text{tg } 10^\circ}{1 - \text{tg}^2 10^\circ}$

3º) $\text{tg } \frac{\pi}{4} = \frac{2.\text{tg } \frac{\pi}{8}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$

4º) $\text{tg } x = \frac{2.\text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE SENOS E COSSENOS

A fatoração de uma expressão é um recurso muito importante para a simplificação de frações, bem como para a resolução de equações e de inequações.

Dedução de fórmulas

Sejam as fórmulas:

- sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a;
- sen (a − b) = sen a.cos b − sen b.cos a;
- cos (a + b) = cos a.cos b − sen a.sen b;
- cos (a − b) = cos a.cos b + sen a.sen b.

A partir delas, é possível concluir que:

i) sen (a + b) + sen (a − b) = 2.sen a.cos b

ii) sen (a + b) − sen (a − b) = 2.sen b.cos a

iii) cos (a + b) + cos (a − b) = 2.cos a.cos b

iv) cos (a + b) − cos (a − b) = −2.sen a.sen b

Essas fórmulas transformam somas e diferenças em produtos. Para facilitar o seu uso, convém escolher novas variáveis **p** e **q**, tal que a + b = p e a − b = q.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

Assim, as fórmulas ficam:

I	$\text{sen } p + \text{sen } q = 2.\text{sen } \frac{p+q}{2}.\cos \frac{p-q}{2}$
II	$\text{sen } p - \text{sen } q = 2.\text{sen } \frac{p-q}{2}.\cos \frac{p+q}{2}$
III	$\cos p + \cos q = 2.\cos \frac{p+q}{2}.\cos \frac{p-q}{2}$
IV	$\cos p - \cos q = -2.\text{sen } \frac{p+q}{2}.\text{sen } \frac{p-q}{2}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE TANGENTES

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} + \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p.\cos q + \text{sen } q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p + q)}{\cos p.\cos q}$$

Assim, sendo **p** e **q** $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p + q)}{\cos p.\cos q}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p - q)}{\cos p.\cos q}$$

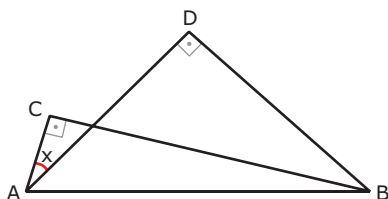
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FUVEST-SP) Nos triângulos retângulos da figura, AC = 1 cm, BC = 7 cm, AD = BD. Sabendo que sen (a – b) = sen a.cos b – cos a.sen b, o valor de sen x é

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{7}{\sqrt{50}}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

02. (Unifor-CE) O valor da expressão

cos x.cos y + sen x.sen y, para $x = \frac{\pi}{5}$ e $y = \frac{\pi}{30}$, é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) 1

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

03. (FUVEST-SP) O valor de (sen 22°30' + cos 22°30')^2 é

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

D) 1

E) 2

04. (UFJF-MG) Sendo x + y = 60°, o valor de (cos x + cos y)^2 + (sen x – sen y)^2 – 2 é

A) –2

B) $-\frac{1}{2}$

C) 0

D) 1

E) 2

05. (UFC) Se sen x + cos x = $\frac{1}{\sqrt{3}}$, então o valor de sen 2x é

A) $-\frac{2}{3}$

B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

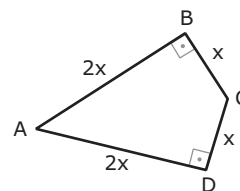
01. (FUVEST-SP) No quadrilátero ABCD, em que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos e os lados têm as medidas indicadas, o valor de sen $\hat{A}$ é

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{2}{5}$

E) $\frac{1}{2}$

02. (FUVEST-SP) O valor de (tg 10° + cotg 10°).sen 20° é

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 4

03. (UFSM-RS) O valor da expressão 4.sen x.cos x.cos 2x, para $x = \frac{\pi}{16}$ é

A) 1

B) –1

C) 0

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

04. (FUVEST-SP) Se $\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$, então cos x vale

A) $-\frac{3}{8}$

B) $\frac{3}{8}$

C) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{\sqrt{32}}{4}$

05. (UFTM-MG–2008) Se sen x + cos x = $\frac{1}{n}$ e sen 2x = $-\frac{24}{25}$, com $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ e n > 0, então **n** é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06. (Mackenzie-SP) Se sen x = $\frac{4}{5}$ e tg x < 0, então tg 2x vale

A) $\frac{24}{7}$

B) $-\frac{24}{7}$

C) $-\frac{8}{3}$

D) $\frac{8}{3}$

E) $-\frac{4}{3}$

MATEMÁTICA

07. (PUC Rio) Se tg 3x = 4, então tg 6x é igual a

A) 8
B) $-\frac{8}{15}$
C) $\frac{3}{4}$
D) $-\frac{3}{4}$
E) $\frac{5}{8}$

08. (UFSJ-MG) Se cossec $\theta = -\sqrt{5}$, então o valor de cos 2θ é

A) 0,4
B) −0,5
C) $\sqrt{5}$
D) 0,6

09. (PUC Minas) A expressão $\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ é igual a

A) tg α + tg β
B) cotg α + cotg β
C) sec α + sec β
D) cossec α + cossec β
E) cos α + cos β

10. (PUC RS) A expressão $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ é idêntica a

A) 2.cos 2α
B) 2.sen 2α
C) cos 2α
D) sen 2α
E) cos 2α − sen 2α

11. (PUC Minas) M = $\cos^2 x$, para todo **x** real, é **CORRETO** afirmar que **M** é igual a

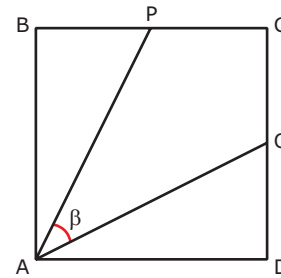
A) $\frac{1+\text{sen}\,2x}{2}$
B) $\frac{1-\text{sen}\,2x}{2}$
C) $\frac{1+\cos 2x}{2}$
D) $\frac{1-\cos 2x}{2}$
E) $\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)^2$

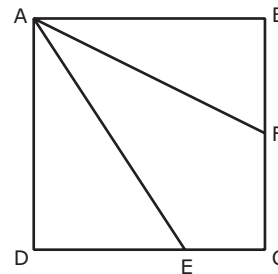
12. (Unifor-CE) A expressão $\left(\text{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$ é equivalente a

A) 1
B) 0
C) $\cos^2\frac{x}{2}$
D) 1 + sen x
E) 1 + cos x

13. (UECE) Se P = $\frac{\text{sen } 40°}{\text{sen } 20°} - \frac{\cos 40°}{\cos 20°}$, então $P^2 - 1$ é igual a

A) sen^2 20°
B) $\cos^2$ 20°
C) tg^2 20°
D) cotg^2 20°

14. (FGV-SP–2009) Seja ABCD um quadrado, e **P** e **Q** pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Então, sen β é igual a

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
B) $\frac{3}{5}$
C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
D) $\frac{4}{5}$
E) $\frac{5}{6}$

15. (FUVEST-SP–2010) A figura representa um quadrado ABCD de lado 1. O ponto **F** está em $\overline{BC}$, $\overline{BF}$ mede $\frac{\sqrt{5}}{4}$, o ponto **E** está em $\overline{CD}$ e $\overline{AF}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}E$. Nessas condições, o segmento $\overline{DE}$ mede

A) $\frac{3\sqrt{5}}{40}$
B) $\frac{7\sqrt{5}}{40}$
C) $\frac{9\sqrt{5}}{40}$
D) $\frac{11\sqrt{5}}{40}$
E) $\frac{13\sqrt{5}}{40}$

GABARITO

Fixação

01. C	03. C	05. A
02. B	04. D	

Propostos

01. C	06. A	11. C
02. C	07. B	12. D
03. E	08. D	13. C
04. D	09. A	14. B
05. E	10. A	15. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 06 FRENTE E

Equações e inequações trigonométricas

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas.

Para resolver a equação trigonométrica f(x) = g(x), devemos reduzi-la a uma das três equações seguintes:

i) sen α = sen β;

ii) cos α = cos β;

iii) tg α = tg β.

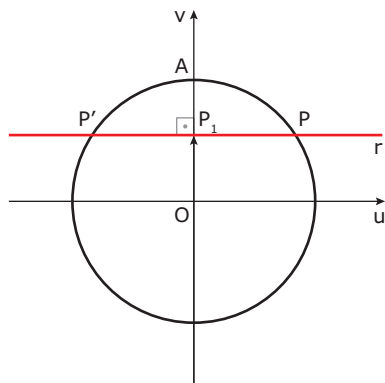
Estas são denominadas equações fundamentais.

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO SEN α = SEN β

Se sen α = sen β = OP_1, então as imagens de **α** e **β** no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) **α** e **β** têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) **α** e **β** têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares.

Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

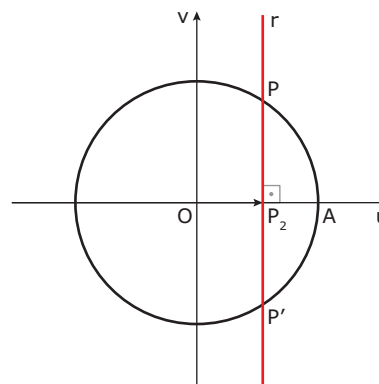
$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO COS α = COS β

Se cos α = cos β = OP_2, então as imagens de **α** e **β** no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) **α** e **β** têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) **α** e **β** têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos.

Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

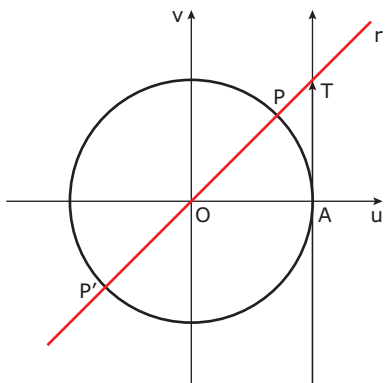
$$\therefore \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \pm \beta + 2k\pi$$

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TG α = TG β

Se tg α = tg β = AT, então as imagens de $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ estão sobre a reta **r**, determinada por **O** e **T**, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo.

Em resumo, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\therefore \text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dadas f(x) e g(x) duas funções trigonométricas, as inequações trigonométricas f(x) > g(x) ou f(x) < g(x) podem ser reduzidas a inequações de um dos seis tipos:

i) sen x > m

ii) sen x < m

iii) cos x > m

iv) cos x < m

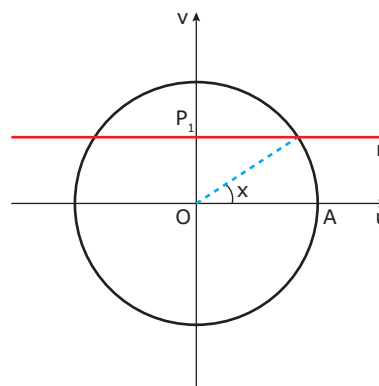
v) tg x > m

vi) tg x < m

Em que **m** é um número real dado a denominadas inequações fundamentais.

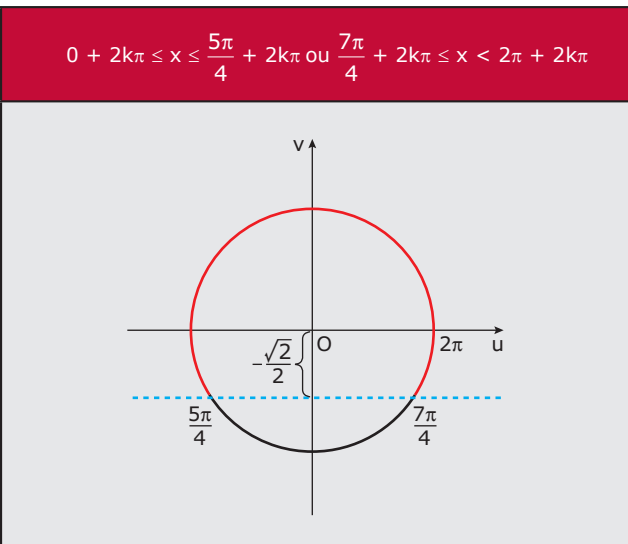
RESOLUÇÃO DE SEN X > M

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que OP_1 = m. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de **r**.

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais **x** pode pertencer, tomando o cuidado de partir de **A** e de percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

Exemplo

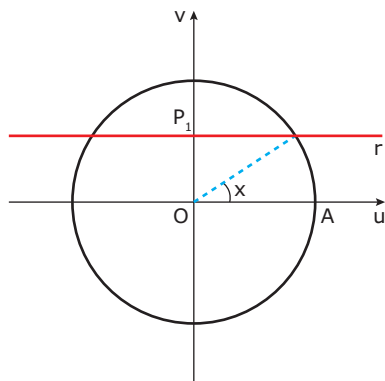
Resolver a inequação sen x $\geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k $\in \mathbb{Z}$, temos:

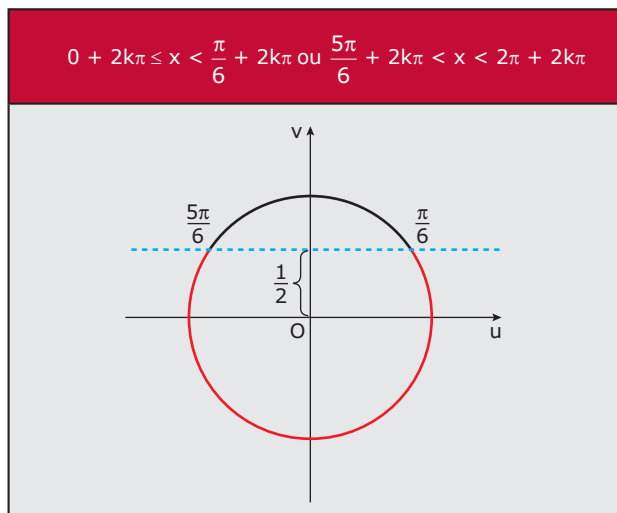
$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi$$

Notemos que escrever $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ estaria errado, pois, como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe **x** algum nesse intervalo.

RESOLUÇÃO DE SEN X < M

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que $OP_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de **r**.

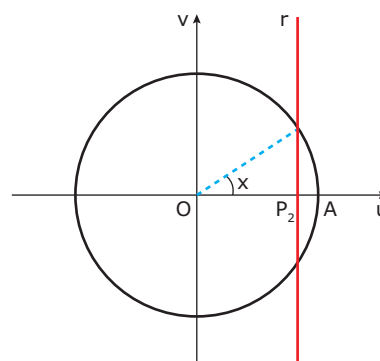
Finalmente, partindo de **A** e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

Exemplo

Resolver a inequação sen x < $\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

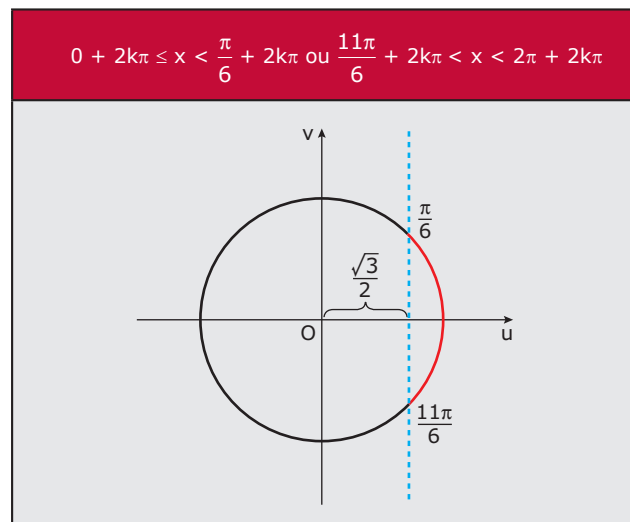
Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

RESOLUÇÃO DE COS X > M

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

Exemplo

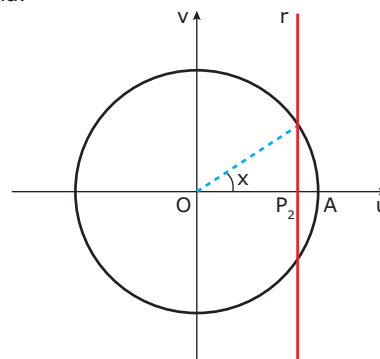
Resolver a inequação cos x > $\frac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

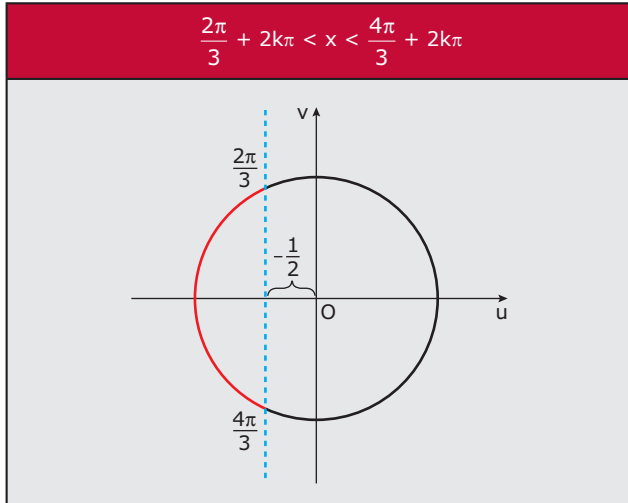
RESOLUÇÃO DE COS X < M

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que $OP_2 = m$. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à esquerda de **r**.

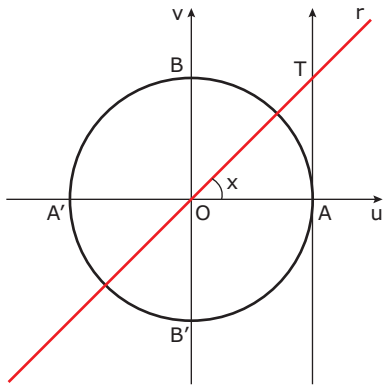
Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

MATEMÁTICA

Exemplo

Resolver a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

RESOLUÇÃO DE TG X > M

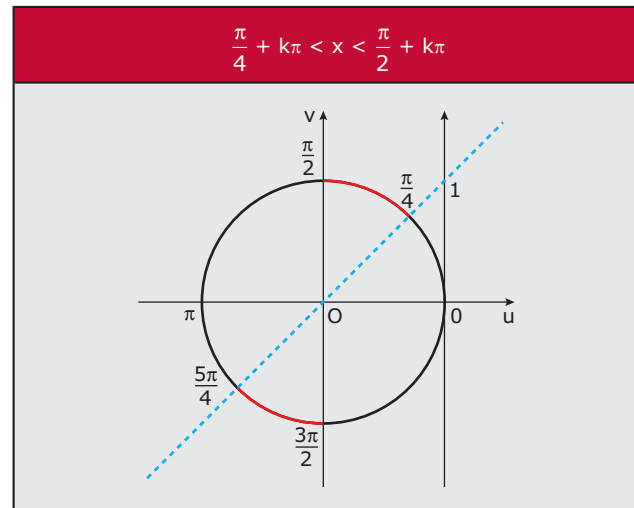
Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x > m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

Exemplo

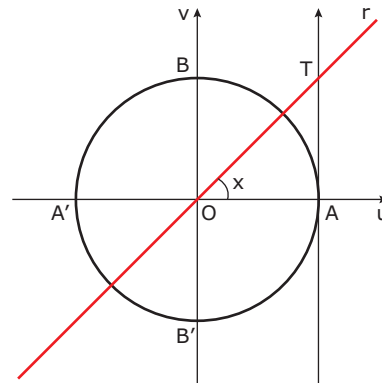
Resolver a inequação tg x > 1, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

que podem ser resumidos em:

RESOLUÇÃO DE TG X < M

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x < m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B' + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

Exemplo

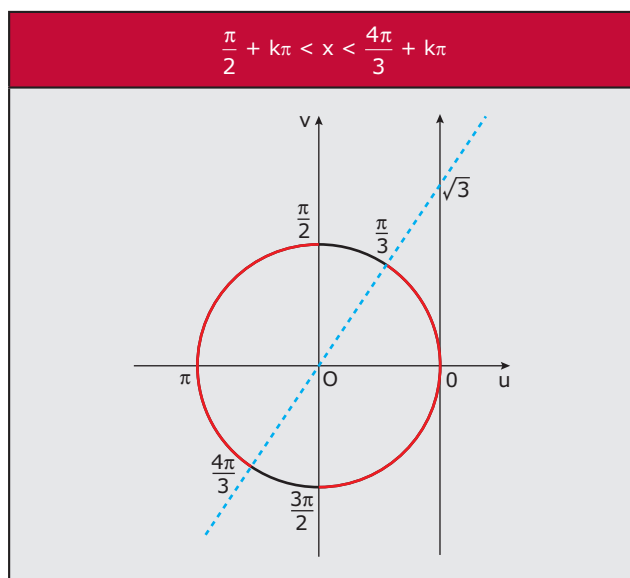
Resolver a inequação $\text{tg } x < \sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi,$$

que podem ser resumidos em:

$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFU-MG) Considere que **f** e **g** são as funções reais de variável real dadas, respectivamente, por $f(x) = 1 + \text{sen}(2x)$ e $g(x) = 1 + 2.\cos(x)$. Desse modo, podemos afirmar que, para $x \in [0,2\pi)$, os gráficos de **f** e **g** cruzam-se em

A) 1 ponto.
B) 2 pontos.
C) 3 pontos.
D) nenhum ponto.

02. (Unifor-CE) Para todo número inteiro **k**, o conjunto solução de $(\cos x + \text{sen } x)^4 = 0$ é o conjunto dos números reais **x** iguais a

A) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
B) $\frac{\pi}{4} + k\pi$
C) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
D) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$
E) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

03. (UFJF-MG) O conjunto solução da equação $|\cos 2x| = 0$ é

A) $\{x \in \mathbb{R};\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
B) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\{x \in \mathbb{R};\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

04. (Mackenzie-SP) Se **α** é a soma das soluções da equação $\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)^2 + 2.\text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$, resolvida em $[0, 2\pi]$, então o valor de sen $\frac{\alpha}{2}$ é

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

05. (VUNESP) O conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, é definido por

A) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
B) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$
C) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
E) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFLA-MG–2009) O conjunto verdade (conjunto solução) da equação sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é

A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

02. (UNIRIO-RJ) O conjunto solução da equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, sendo **x** um arco da 1ª volta positiva, é dado por

A) {60°, 300°}
B) {30°, 330°}
C) {30°, 150°}
D) {30°, 150°, 210°, 330°}
E) {15°, 165°, 195°, 345°}

03. (UFRGS) O conjunto solução da equação sen $x + \cos x = 0$ é

A) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
B) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\left\{2k\pi + \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
D) $\left\{2k\pi - \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
E) $\left\{k\pi.\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

04. (CEFET-MG–2009) O conjunto solução da equação $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ para $x \in [0, 2\pi]$ é

A) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
B) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
C) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
D) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
E) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$

MATEMÁTICA

05. (UFJF-MG–2009) Os valores de $x \in [0, 3\pi]$ que satisfazem a desigualdade $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ são

A) $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$

B) $\left]\frac{5\pi}{6}, 3\pi\right]$

C) $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right[$

D) $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right[$

E) $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{6}, 3\pi\right]$

06. (Unifor-CE) O número de soluções da equação $2.\text{sen } x.\cos x = 4$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

07. (UNIRIO-RJ) O conjunto solução da equação $\text{sen } x = \cos x$, sendo $0 \leq x < 2\pi$, é

A) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{\frac{5\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

08. (UFV-MG) Se $2.\cos^2\theta - 3.\cos\theta + 1 = 0$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então

A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{6}$

B) $\text{sen } \theta = 1$ ou $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$

C) $\text{sen } \theta = 0$ ou $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{8}$

E) $\theta = 0$ ou $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

09. (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos x > \frac{1}{2}$ se, e somente se, **x** satisfizer à condição

A) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

C) $\pi < x < 2\pi$

D) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

E) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi$

10. (Cesgranrio) O arco **x** é medido em radianos. Então, a soma das duas menores raízes positivas de $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ é

A) $\frac{4\pi}{5}$ B) π C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

11. (UFC) Considere a equação $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$. Pode-se afirmar que a soma de suas soluções que pertencem ao intervalo $[0, 4\pi]$ é

A) 1 B) –1 C) 0 D) 4π E) 2π

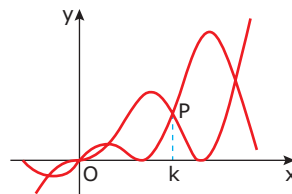
12. (Unimontes-MG–2009) As soluções da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$, são

A) $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π

B) $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$

C) 0, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π

D) 0, $\frac{\pi}{2}$ e π

13. (UFTM-MG–2008) Na figura, na qual estão representados os gráficos das funções $f(x) = x.\text{sen}^2 x$ e $g(x) = x.\cos^2 x$, **P** é um ponto onde dois gráficos se interceptam.

Se **k** é a abscissa do ponto **P**, então o valor de f(2k) é igual a

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{3\pi}{8}$ E) 0

14. (UEL-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\cos 2x = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - x\right]$ é

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. (UFU-MG) O conjunto solução da desigualdade

$$\left|\text{sen}(x) - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4},$$

para $0 < x < 2\pi$, é igual a

A) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{\frac{5\pi}{6} < x < \pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$

C) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{5\pi}{6} < x < \pi \text{ ou } \pi < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$

E) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

GABARITO

Fixação

01. B 02. D 03. C 04. C 05. A

Propostos

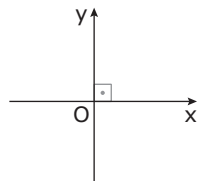
01. B	04. B	07. E	10. B	13. B
02. D	05. E	08. C	11. D	14. D
03. A	06. A	09. E	12. B	15. E

MATEMÁTICA

Sistema cartesiano e ponto

MÓDULO 07 FRENTE E

SISTEMA CARTESIANO – COORDENADAS DE UM PONTO

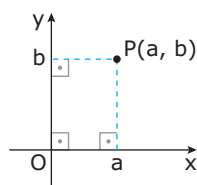
Sejam **x** e **y** dois eixos perpendiculares entre si e com origem comum **O**, conforme a figura a seguir:

Nessas condições, diz-se que **x** e **y** formam um sistema cartesiano retangular (ou ortogonal), e o plano por eles determinado é chamado plano cartesiano.

Eixo **x** (ou Ox): eixo das abscissas

Eixo **y** (ou Oy): eixo das ordenadas

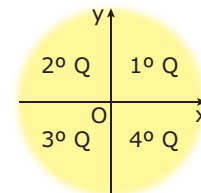
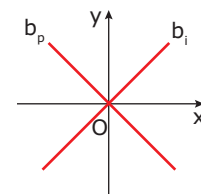
O: origem do sistema

A cada ponto **P** do plano, corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de **P** sobre o eixo **x** e sobre o eixo **y**, respectivamente.

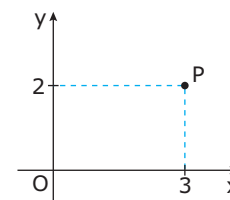
Assim, o ponto **P** tem coordenadas **a** e **b**, e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).

Nota:

Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que será chamado, simplesmente, sistema cartesiano.

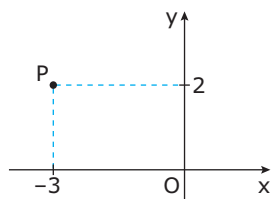
OBSERVAÇÕES

i) Os eixos **x** e **y** dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes **Q**, que são numerados, como na figura a seguir:

ii) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes ímpares e indicada por b_i. A do 2º e 4º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes pares e indicada por b_p.

Propriedades

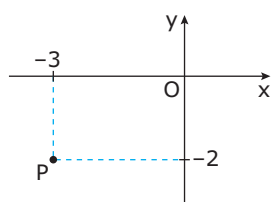
i) Todo ponto P(a, b) do 1º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

P(a, b) ∈ 1º Q ⇔ a > 0 e b > 0

Assim: P(3, 2) ∈ 1º Q

ii) Todo ponto P(a, b) do 2º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada positiva (b > 0) e reciprocamente.

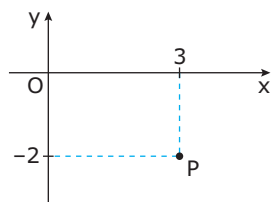
P(a, b) ∈ 2º Q ⇔ a < 0 e b > 0

Assim: P(−3, 2) ∈ 2º Q

iii) Todo ponto P(a, b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

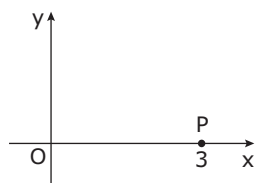
P(a, b) ∈ 3º Q ⇔ a < 0 e b < 0

Assim: P(−3, −2) ∈ 3º Q

iv) Todo ponto P(a, b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

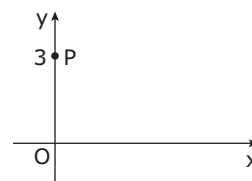
P(a, b) ∈ 4º Q ⇔ a > 0 e b < 0

Assim: P(3, −2) ∈ 4º Q

v) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

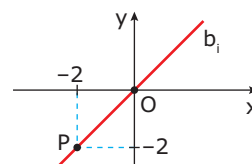
P(a, b) ∈ Ox ⇔ b = 0

Assim: P(3, 0) ∈ Ox

vi) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

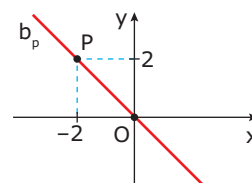
P(a, b) ∈ Oy ⇔ a = 0

Assim: P(0, 3) ∈ Oy

vii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

P(a, b) ∈ b_i ⇔ a = b

Assim: P(−2, −2) ∈ b_i

viii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = −b) e reciprocamente.

P(a, b) ∈ b_p ⇔ a = −b

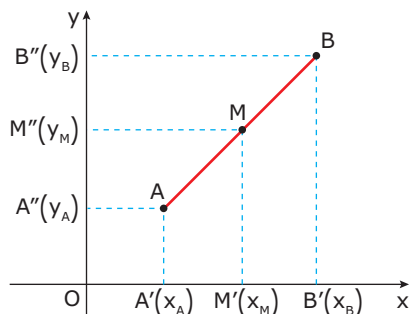
Assim: P(−2, 2) ∈ b_p

PONTO MÉDIO

Considerem-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ou seja, o ponto **M** é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Demonstração:

Se **M** é ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), pelo Teorema de Tales, para o eixo **x**, pode-se escrever:

$$A'M' = M'B' \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow$$

$$2.x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, para o eixo **y**, tem-se: $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, as coordenadas do ponto médio **M** do segmento $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$) são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de **A** e **B** e das ordenadas de **A** e **B**.

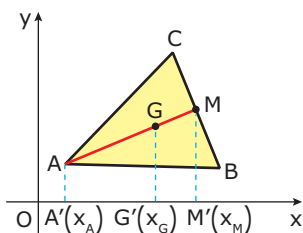
BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. O baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ou seja, o ponto **G** é dado por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Demonstração:

Considerando a mediana $\overline{AM}$, o baricentro **G** é tal que:

$$AG = 2.GM$$

Pelo Teorema de Tales, para o eixo **x**, podemos escrever:

$$A'G' = 2.G'M'$$

$$x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \Rightarrow 3.x_G = x_A + 2.x_M$$

E, como $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$, tem-se:

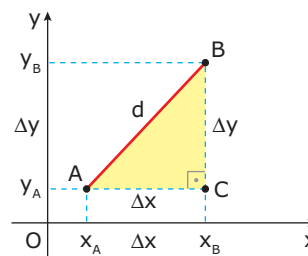
$$3.x_G = x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente, para o eixo **y**, tem-se:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a algum dos eixos coordenados.

Traçando-se por **A** e **B** as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em **C**, tem-se o triângulo ACB, retângulo em **C**.

A distância entre os pontos **A** e **B** que se indica por **d** é tal que:

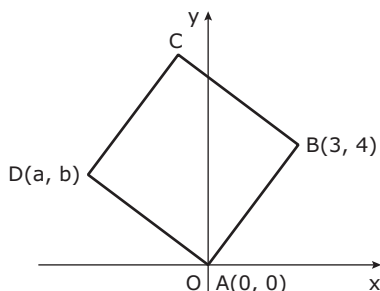
$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

OBSERVAÇÕES

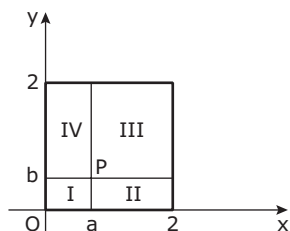
i) Como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.

ii) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos, ou, ainda, se os pontos **A** e **B** coincidem, caso em que d = 0.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2008) Nesta figura, está representado um quadrado de vértices ABCD.

Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos **A** e **B** são A(0, 0) e B(3, 4). Então, é **CORRETO** afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice **D** é

A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$

02. (UFMG–2007) Seja P(a, b) um ponto no plano cartesiano, tal que $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$. As retas paralelas aos eixos coordenados que passam por **P** dividem o quadrado de vértices (0, 0), (2, 0), (0, 2) e (2, 2) nas regiões I, II, III e IV, como mostrado nesta figura:

Considere o ponto $Q = (\sqrt{a^2 + b^2}, ab)$.

Então, é **CORRETO** afirmar que o ponto **Q** está na região

A) I. C) III.
B) II. D) IV.

03. (Cesgranrio) Os pontos **M**, **N**, **P** e **Q** do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Se M(3, 5), N(1, 2) e P(5, 1), então o vértice **Q** é

A) (7, 4) D) (8, 6)
B) (6, 5) E) (6, 3)
C) (9, 8)

04. (UFMG) A área de um quadrado que tem A(4, 8) e B(−2, 2) como vértices opostos é

A) 36 D) 16
B) 20 E) 12
C) 18

05. (UFMG–2010) Os pontos A(0, 3), B(4, 0) e C(a, b) são vértices de um triângulo equilátero no plano cartesiano. Considerando-se essa situação, é **CORRETO** afirmar que

A) $b = \frac{4}{3}a$

B) $b = \frac{4}{3}a - \frac{7}{6}$

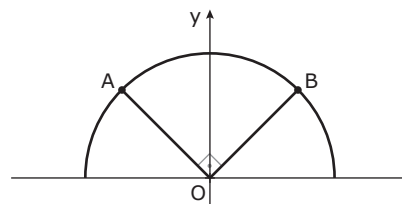
C) $b = \frac{4}{3}a + 3$

D) $b = \frac{4}{3}a - \frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Sejam A(1, 2) e B(3, 2) dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento $\overline{AC}$ é obtido do segmento $\overline{AB}$ por uma rotação de 60°, no sentido anti-horário, em torno do ponto **A**. As coordenadas do ponto **C** são

A) $(2, 2 + \sqrt{3})$
B) $\left(1 + \sqrt{3}, \frac{5}{2}\right)$
C) $(2, 1 + \sqrt{3})$
D) $(2, 2 - \sqrt{3})$
E) $(1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$

02. (Mackenzie-SP–2009)

A figura mostra uma semicircunferência com centro na origem. Se o ponto **A** é $(-\sqrt{2}, 2)$, então o ponto **B** é

A) $(2, \sqrt{2})$ D) $(\sqrt{5}, 1)$
B) $(\sqrt{2}, 2)$ E) $(2, \sqrt{5})$
C) $(1, \sqrt{5})$

03. (UFMG) Se A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1) são os vértices de um quadrado, então $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ pertence

A) ao lado $\overline{AB}$.
B) ao lado $\overline{BC}$.
C) ao lado $\overline{CD}$.
D) à diagonal $\overline{AC}$.
E) à diagonal $\overline{BD}$.

04. (UFMG) Seja P(x, y) um ponto equidistante dos eixos coordenados e de distância 1 da origem. Pode-se afirmar que o número de pontos que satisfazem essas condições é

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

05. (UFMG) A distância entre os pontos A(2a, –3a) e B(3, 2) é $\sqrt{26}$. Pode-se afirmar que os **POSSÍVEIS** valores de **a** são

A) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$
B) $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$
C) –1 e 1
D) –2 e 2
E) –3 e 2

06. (UFMG) Seja Q(–1, a) um ponto do 3º quadrante. O valor de **a**, para que a distância do ponto P(a, 1) ao ponto **Q** seja 2, é

A) $-1 - \sqrt{2}$
B) $1 - \sqrt{2}$
C) $1 + \sqrt{2}$
D) $-1 + \sqrt{2}$
E) –1

07. (UFOP-MG–2008) O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas medianas. Sendo assim, as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo de vértices (2, 2), (–4, –2) e (2, –4) são

A) $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$
B) $\left(0, -\frac{5}{4}\right)$
C) $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$
D) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

08. (UFAL) Sejam P(2, 1) e o ponto **Q**, de abscissa 4, localizado no 1º quadrante. Se a distácia de **Q** a **P** é igual à distância de **Q** ao eixo das abscissas, então **Q** é o ponto

A) $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$
B) $\left(4, \frac{5}{2}\right)$
C) (4, 3)
D) (2, 4)
E) (4, 4)

09. (UECE) Se o ponto $P_1(x_1, y_1)$ é equidistante dos pontos O(0, 0), M(7, –7) e N(8, 0), então $x_1^2 + y_1^2$ é igual a

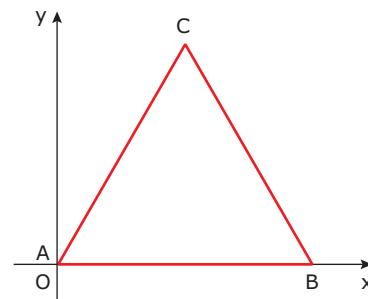
A) 13
B) 17
C) 25
D) 29
E) N.d.a.

10. (UCDB-MS) Um triângulo tem vértices A(15, 10), B(6, 0), C(0, 10). Então, a mediana $\overline{AM}$ mede

A) 10 u.c.
B) 12 u.c.
C) 11 u.c.
D) 13 u.c
E) 9 u.c.

11. (FEI-SP) Os pontos **X**, **Y** e **Z** possuem, respectivamente, as seguintes coordenadas no plano cartesiano: (0, 0), (m, 8), (n, n + 3). Se **Z** é o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, então

A) m = 2
B) m = 1
C) n = 3
D) m = 5
E) n = 2

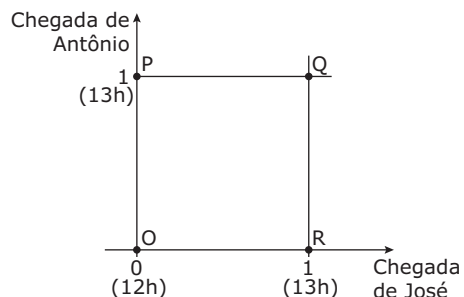
12. (UCSal-BA) Na figura, o triângulo ABC é equilátero, sendo **A** e **B**, respectivamente, os pontos (0, 0) e (4, 0).

As coordenadas do ponto **C** são

A) (2, 1)
B) (2, 2)
C) $(2, 2\sqrt{3})$
D) $(3, 3\sqrt{3})$
E) (3, 2)

13. (UFU-MG) Considere, no plano cartesiano com origem **O**, um triângulo cujos vértices **A**, **B** e **C** têm coordenadas (–1, 0), (0, 4) e (2, 0), respectivamente. Se **M** e **N** são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, a área do triângulo OMN será igual a

A) $\frac{5}{3}$ u.a.
B) $\frac{8}{5}$ u.a.
C) 1 u.a.
D) $\frac{3}{2}$ u.a.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–1999) José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. Chamando de **x** o horário de chegada de José e de **y** o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR indicada a seguir corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y).

Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde

A) à diagonal OQ.

B) à diagonal PR.

C) ao lado PQ.

D) ao lado QR.

E) ao lado OR.

02. O mapa de certa cidade foi dividido em quatro quadrantes, por meio de duas retas perpendiculares e numeradas, que se cortam no ponto (0, 0), cada um deles correspondendo a um quadrante do plano cartesiano. O sentido positivo do eixo **y** é o norte, e o sentido positivo do eixo **x** é o leste. Edificações que, nessa cidade, estiverem a mais de um quilômetro a oeste e a mais de um quilômetro ao norte do ponto (0, 0) estarão localizadas no

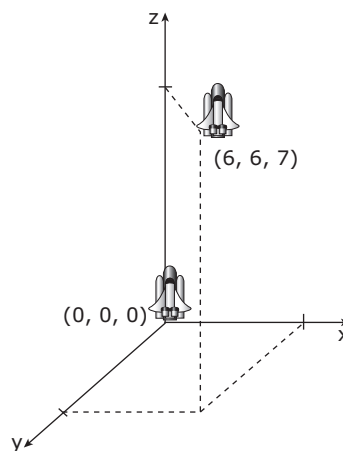
A) primeiro quadrante.

B) segundo quadrante.

C) terceiro quadrante.

D) quarto quadrante.

E) ponto (0, 0).

03. (Enem–2010) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo x, 3 km para trás na direção do eixo y, e 11 km para frente, na direção do eixo z, então o foguete atingiu a posição

A) (17, 3, 9)

B) (8, 3, 18)

C) (6, 18, 3)

D) (4, 9, –4)

E) (3, 8, 18)

GABARITO

Fixação

01. B 02. B 03. A 04. A 05. B

Propostos

01. A
02. A
03. D
04. D
05. C
06. E
07. A
08. B
09. C
10. D
11. A
12. C
13. D

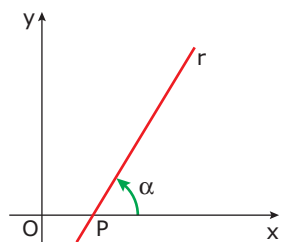
Seção Enem

01. A 02. B 03. B

Estudo analítico da reta

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Considere-se, no plano cartesiano, uma reta **r** concorrente com o eixo **x** no ponto **P**.

Chama-se inclinação de **r** a medida do ângulo **α** que **r** forma com o eixo Ox, sendo esse ângulo medido a partir do eixo **x** no sentido anti-horário.

Sendo **r** paralela ao eixo **x** (horizontal), define-se como inclinação de **r** o ângulo de medida zero, isto é, $\alpha = 0°$.

Então:

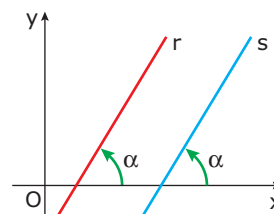
α = 0° (nulo)	**0° < α < 90° (agudo)**
y, r, O, x	y, r, α, O, x
α = 90° (reto)	**90° < α < 180° (obtuso)**
y, r, α, O, x	y, r, α, O, x

COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

Considerando-se uma reta **r** não perpendicular ao eixo **x** (não vertical), ou seja, tal que $\alpha \neq 90°$, chama-se coeficiente angular (ou declividade) da reta **r** o número **m**, tal que $m = \text{tg}\ \alpha$.

OBSERVAÇÃO

i) A inclinação **m** de uma reta é tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

ii) No plano cartesiano, duas retas paralelas têm a mesma inclinação.

Se $\alpha = 90°$, então a reta não tem coeficiente angular.

Assim, tem-se:

Isto é:

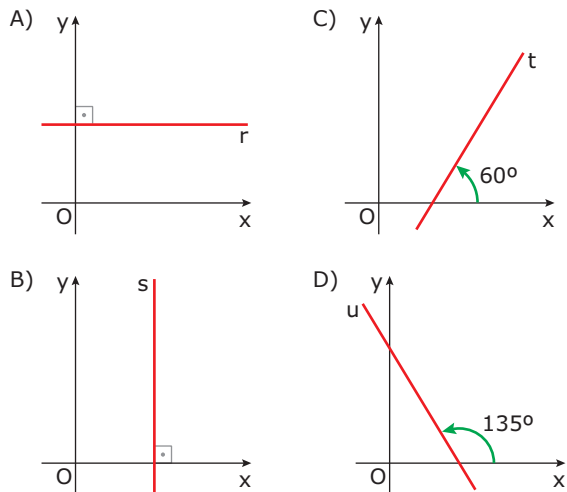
i) Se $\alpha = 0°$, então $m = 0$.

ii) Se $\alpha = 90°$, então não existe **m**.

iii) Se $0 < \alpha < 90°$, então $m > 0$.

iv) Se $90° < \alpha < 180°$, então $m < 0$.

Exemplo

Dar os coeficientes angulares das retas **r**, **s**, **t** e **u**.

A)
C)
B)
D)
Resolução:

A) $\alpha_r = 0° \Rightarrow m_r = \text{tg } 0° \Rightarrow m_r = 0$

B) $\alpha_s = 90° \Rightarrow$ não existe m_s.

C) $\alpha_t = 60° \Rightarrow m_t = \text{tg } 60° \Rightarrow m_t = \sqrt{3}$

D) $\alpha_u = 135° \Rightarrow m_u = \text{tg } 135° \Rightarrow m_u = -1$

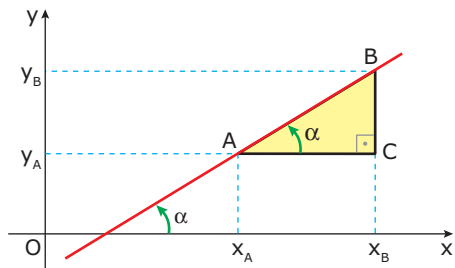
COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA QUE PASSA POR DOIS PONTOS DADOS

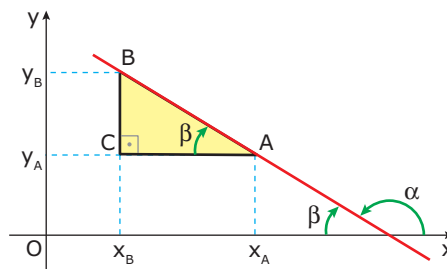
Considerem-se dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, isto é, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é paralela aos eixos coordenados. Há dois casos a se considerar:

1º caso: α < 90º

Do triângulo ABC, tem-se:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2º caso: α > 90º

Do triângulo ABC, tem-se:

$$\text{tg } \beta = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$

Como $\alpha + \beta = 180º$, tem-se $\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$.

Logo: $m = \text{tg } \alpha = -\dfrac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Portanto, para os dois casos, tem-se:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

OBSERVAÇÕES

i) Se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo **x** $(y_A = y_B \text{ e } x_A \neq x_B)$, tem-se m = 0, e a fórmula continua válida.

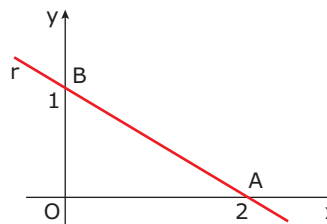
ii) Se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao eixo **x** $(x_A = x_B \text{ e } y_A \neq y_B)$, não existe **m**, pois $x_A - x_B = 0$.

Exemplos

1º) Qual o coeficiente angular das retas que passam nos seguintes pontos:

A) $\left.\begin{matrix} A(2, 1) \\ B(4, 9) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{9 - 1}{4 - 2} \Rightarrow m_{AB} = 4$

B) $\left.\begin{matrix} A(-1, 2) \\ B(0, 5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{5 - 2}{0 - (-1)} \Rightarrow m_{AB} = 3$

2º) Qual o coeficiente angular da reta **r** na figura?

Resolução:

Temos: A(2, 0) e B(0, 1)

$$m = m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{1 - 0}{0 - 2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DE UMA RETA

No plano cartesiano, uma reta fica determinada por um dos dois modos:

1º modo: Conhecendo-se um de seus pontos e sua declividade, que é dada pela inclinação da reta.

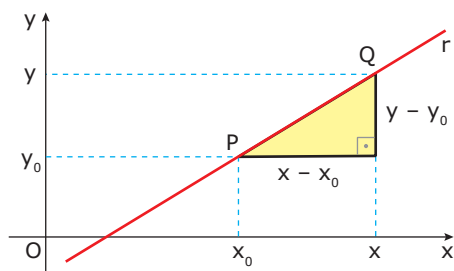
2º modo: Conhecendo-se dois pontos distintos que pertencem a ela.

Vejamos, então, como se obtém a equação de uma reta.

1º modo: Temos dois casos a considerar:

i) A reta tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r**, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**.

Sendo Q(x, y) um ponto genérico de **r**, distinto de **P**, então o coeficiente angular **m** da reta pode ser calculado a partir de **P** e **Q**.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (1)$$

A relação (1) entre as coordenadas dos pontos **P** e **Q** pode ser escrita na forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2)$$

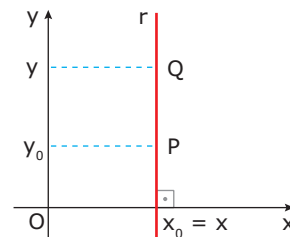
Note que se P = Q, então $x = x_0$ e $y = y_0$, e a relação (2) continua verdadeira, pois $y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0)$.

Assim:

A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m** é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

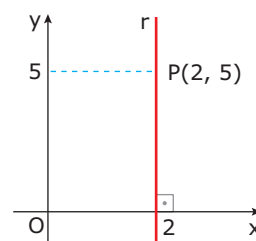
ii) A reta não tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r** que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem inclinação 90° (reta vertical).

Sendo **r** uma reta vertical e Q(x, y) um ponto genérico de **r**, tem-se:

$$x = x_0$$

Exemplo

Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto P(2, 5) e é perpendicular ao eixo **x**.

Resolução:

$x = x_0$, isto é, $x = 2$, ou seja, $x - 2 = 0$.

2º modo: Obter uma equação da reta que passa por dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Procede-se da seguinte maneira:

i) Calcula-se o coeficiente angular **m** da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ii) Com o coeficiente angular **m** e qualquer um dos dois pontos dados, recai-se no 1º modo.

Assim, tomando-se o ponto **A**, tem-se:

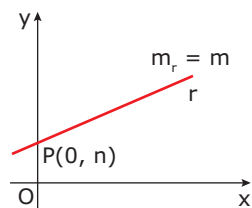
$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Que é a equação fundamental da reta que passa pelos pontos **A** e **B**.

MATEMÁTICA

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA RETA

Equação reduzida

Considere-se a reta **r** que passa pelo ponto P(0, n) e tem coeficiente angular **m**.

Sua equação fundamental é:

$$y - n = m(x - 0)$$

Segue-se que:

$$y = mx + n$$

Esta é chamada equação reduzida da reta.

OBSERVAÇÕES

i) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular **m** e a ordenada **n** do ponto onde esta reta intercepta o eixo **y**.

ii) As retas de inclinação igual a 90° não possuem equação reduzida.

Equação geral

No plano cartesiano, toda equação de uma reta pode ser escrita na forma ax + by + c = 0, com a ≠ 0 ou b ≠ 0.

De fato:

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos, e $x_A \neq x_B$, temos:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental da reta que passa por **A** e **B** é:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A) \Rightarrow$$

$$yx_B - yx_A - y_Ax_B + y_Ax_A = y_Bx - y_Bx_A - y_Ax + y_Ax_A \Rightarrow$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + y_Bx_A - y_Ax_B = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $y_Bx_A - y_Ax_B = c$, a equação fica:

$$ax + by + c = 0$$

E, se $x_A = x_B$, a equação fica ax + 0y + c = 0, que é a equação de uma reta paralela ao eixo **y**.

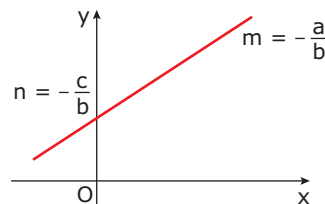
Reciprocamente, no plano cartesiano, a equação ax + by + c = 0 com a ≠ 0 ou b ≠ 0 representa uma reta.

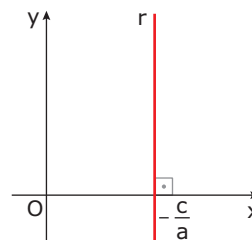
De fato:

Se b ≠ 0, tem-se:

$$by = -ax - c \Rightarrow$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Comparando-se com a equação reduzida y = mx + n, tem-se:

$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Se b = 0, tem-se ax + c = 0, ou seja, $x = -\frac{c}{a}$.

A reta é perpendicular ao eixo **x**.

A equação na forma

$$ax + by + c = 0$$

$$(a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$$

é chamada equação geral da reta.

OBSERVAÇÕES

i) Se c = 0, a equação fica ax + by = 0, e a reta passa pela origem (0, 0).

De fato: a.0 + b.0 = 0

Assim, por exemplo, a reta (**r**) 2x + 3y = 0 passa pela origem.

ii) Se a = 0, a equação fica by + c = 0, e a reta é paralela ao eixo **x**.

De fato: $by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$

Assim, por exemplo, a reta (**r**) 2y + 5 = 0 é paralela ao eixo **x**.

iii) Se b = 0, a equação fica ax + c = 0, e a reta é paralela ao eixo **y**.

De fato: $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$

Assim, por exemplo, a reta (**r**) 2x − 7 = 0 é paralela ao eixo **y**.

OBSERVAÇÃO

Toda reta do plano cartesiano possui infinitas equações na forma geral. Assim, se ax + by + c = 0 é a equação de uma reta, então a equação k(ax + by + c) = 0, k ≠ 0, representa a mesma reta, pois são equações equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções.

Assim, por exemplo, x + 2y + 3 = 0 e 3(x + 2y + 3) = 0 representam a mesma reta.

Equação segmentária

Considere-se uma reta **r** que intercepta o eixo **x** no ponto P(p, 0) e o eixo **y** no ponto Q(0, q), com p ≠ 0 e q ≠ 0.

A equação da reta **r** pode ser escrita na forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

que é chamada equação segmentária da reta **r**.

De fato: $m = \frac{q - 0}{0 - p} = -\frac{q}{p}$

Assim: $y - 0 = -\frac{q}{p}.(x - p)$

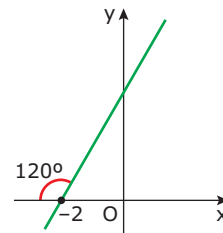
Ou seja, $py = -qx + pq \Rightarrow qx + py = pq$ e, dividindo-se ambos os membros por pq,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

OBSERVAÇÃO

Se uma reta é paralela a um dos eixos ou passa pela origem, então sua equação não pode ser escrita na forma segmentária.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UNIRIO-RJ)

A equação reduzida da reta representada anteriormente é

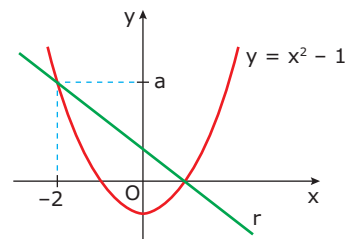
A) $3x - \sqrt{3}y + 6 = 0$

B) $3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$

C) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$

D) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

E) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

02. (UFMG) Observe os gráficos da reta **r** e da função quadrática.

A equação da reta **r** é

A) x − 2y − 2 = 0

B) −2x + y + 1 = 0

C) x + y − 2 = 0

D) x + y + 1 = 0

E) x + y − 1 = 0

03. (UFMG) O ponto $P\left(\frac{1}{2}, b\right)$ pertence à curva $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

A equação da reta que passa por **P** e tem coeficiente angular 2 é

A) 2x − y = 0

B) 2x + y = 0

C) 8x − 4y − 3 = 0

D) 4x − 2y − 1 = 0

E) 8x − 4y − 5 = 0

MATEMÁTICA

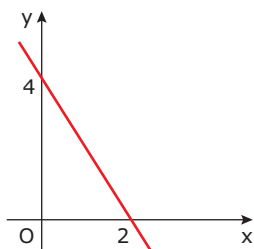
04. (UFMG) Sejam **A** e **B** dois pontos da reta de equação $y = 2x + 2$, que distam duas unidades da origem. Nesse caso, a soma das abscissas de **A** e **B** é

A) $\frac{5}{8}$

B) $-\frac{8}{5}$

C) $-\frac{5}{8}$

D) $\frac{8}{5}$

05. (UFMG) Observe a figura.

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ está representado nessa figura. O valor de $a + b$ é

A) -2

B) 2

C) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) A reta $y = ax + 1$ intercepta a bissetriz do primeiro quadrante num ponto de abscissa -4. O valor de **a** é

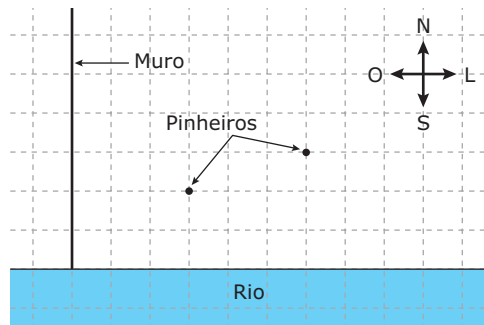
A) $-\frac{3}{4}$

B) $-\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{5}{4}$

02. (UFJF-MG–2010) Na malha quadriculada a seguir, cujos quadrados têm lados medindo 10 metros, encontra-se o mapa de um tesouro.

Sobre o tesouro, sabe-se que

- encontra-se na direção determinada pelos dois pinheiros;
- está a 110 metros a leste do muro.

O valor que **MELHOR** aproxima a distância do tesouro à margem do rio, em metros, é

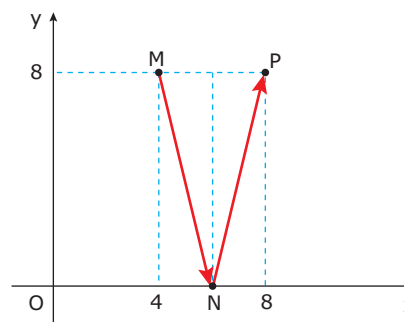
A) 44,3

B) 45,3

C) 45,7

D) 46,7

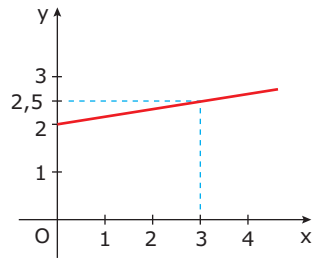
E) 47,3

03. (Unimontes-MG–2009) Um raio luminoso, emitido por uma lanterna localizada no ponto M(4, 8), reflete-se em N(6, 0). A equação da semirreta **r**, trajetória do raio refletido, é

A) $y + 4x - 24 = 0$

B) $y - 4x - 24 = 0$

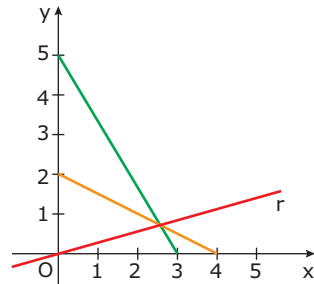
C) $y - 4x + 24 = 0$

D) $y + 4x + 24 = 0$

04. (FGV-SP) A reta da figura a seguir intercepta o eixo das abscissas no ponto

A) (–10, 0)
B) (–11, 0)
C) (–12, 0)
D) (–13, 0)
E) (–14, 0)

05. (UFOP-MG–2009) A reta **r** contém os pontos (–1, –3) e (2, 3). O valor de **m**, de modo que o ponto (m, 7) pertença a **r**, é

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

06. (FGV-SP) A equação da reta **r** da figura é

A) $y = 3x$
B) $y = \frac{5}{18}x$
C) $y = 3x + 5$
D) $y = \frac{3}{4}x$
E) $y = 4x + 2$

07. (FGV-MG) A equação da reta que passa pela origem e pela interseção das retas $2x + y - 6 = 0$ e $x - 3y + 11 = 0$ tem a seguinte equação:

A) $y = 2x$
B) $y = 3x$
C) $y = 4x$
D) $y = 5x$
E) $y = 6x$

08. (Mackenzie-SP) A distância do ponto de interseção das retas $2x - 3y + 26 = 0$ e $5x + 2y - 49 = 0$ à origem é

A) 13
B) 23
C) 15
D) 18
E) 17

09. (UNIFESP–2008) Dadas as retas r: $5x - 12y = 42$, s: $5x + 16y = 56$ e t: $5x + 20y = m$, o valor de **m** para que as três retas sejam concorrentes num mesmo ponto é

A) 14
B) 28
C) 36
D) 48
E) 58

10. (Cesgranrio) Se $(x, y) = (a, b)$ é a interseção das retas $x + 2y = 5$ e $2x - y = 10$, então $a + b$ vale

A) 3
B) 4
C) 5
D) 10
E) 15

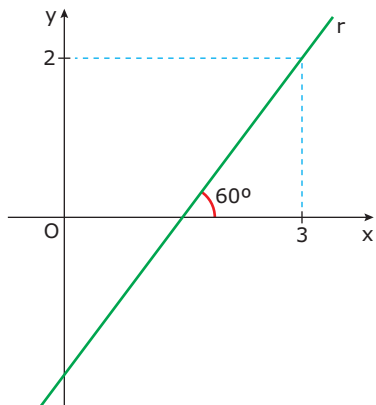
11. (UECE) O perímetro do triângulo formado pelas interseções das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a

A) $2(1 + \sqrt{2})$
B) $4(2 + \sqrt{2})$
C) $4(1 + \sqrt{2})$
D) $2(2 + \sqrt{2})$

12. (FCMSC–SP) As retas **r** e **s** são definidas por $y = 2x + 1$ e $3y + 2x - 2 = 0$. A reta vertical que contém o ponto de interseção de **r** e **s** é definida por

A) $x = -\frac{3}{8}$
B) $y = \frac{1}{4}$
C) $x = -\frac{1}{8}$
D) $x = \frac{3}{8}$
E) $8y - 8x + 5 = 0$

MATEMÁTICA

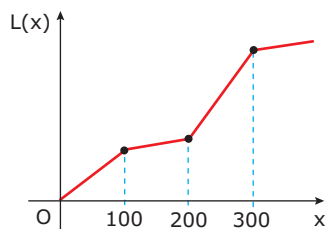
13. (UFMG) Observe a figura.

A ordenada do ponto de interseção da reta **r** com o eixo das ordenadas é

A) $2 - 3\sqrt{3}$
B) $3 - 2\sqrt{3}$
C) $2 - \sqrt{3}$
D) $3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$
E) $3\sqrt{3} - 2$

SEÇÃO ENEM

01. Considere um móvel que descreve uma trajetória com velocidade constante, cujo gráfico do espaço em função do tempo sai da origem do sistema cartesiano e contém o ponto $P(\sqrt{3}, 3)$. O ângulo que o segmento $\overline{OP}$ forma com o eixo das abscissas é

A) 0º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 90º

02. A composição do lucro L(x) de uma empresa depende da quantidade **x** de produtos vendidos, conforme o gráfico a seguir:

A variação do lucro é maior quando a quantidade de produtos vendidos

A) está entre 0 e 100.
B) está entre 100 e 200.
C) está entre 200 e 300.
D) é maior que 300.
E) é indeterminada.

GABARITO

Fixação

01. D
02. E
03. C
04. B
05. B

Propostos

01. E
02. D
03. C
04. C
05. D
06. B
07. C
08. A
09. E
10. C
11. B
12. C
13. A

Seção Enem

01. D
02. C